



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

2016-2017



enim
École nationale d'ingénieurs de Metz



ARTS
ET MÉTIERS
ParisTech

Master Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés

CFMR - Chapitre 5

**Application de la MLR
Fatigue des Matériaux**

A. Zeghloul

SOMMAIRE

- Introduction
 - Endurance en fatigue
 - Endommagement par fatigue
 - Fissuration par fatigue
 - Endommagement en propagation par fatigue
 - Fermeture de fissure en bas de cycle de fatigue
 - Propagation des fissures courtes en fatigue
- Applications : calculs des durées de vie en fatigue

Endommagement en fatigue

Lorsqu'un élément de structure est soumis à un chargement d'amplitude constante, de contrainte $\Delta\sigma$ ou de déformation plastique $\Delta\varepsilon_p$, les courbes de Wöhler ou de Manson-Coffin fournissent directement sa durée de vie.

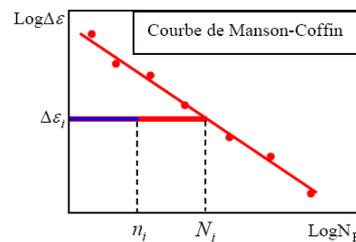
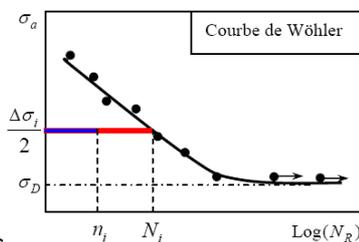
Si en revanche l'amplitude de chargement varie au cours du temps, la façon classique d'aborder le problème consiste à définir l'endommagement associé à chaque amplitude

Le dommage élémentaire D_i sous amplitude constante ($\Delta\sigma_i$ ou $\Delta\varepsilon_i$) est défini par la relation suivante :

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}$$

n_i le nombre de cycles effectué à l'amplitude $\Delta\sigma_i$ ou $\Delta\varepsilon_i$

N_i le nombre de cycles à rupture correspondant (dédié de la courbe de Wöhler ou de celle de Manson-Coffin)



Rupture lorsque

$$\sum D_i = \sum \frac{n_i}{N_i} = 1$$

Règle de MINER

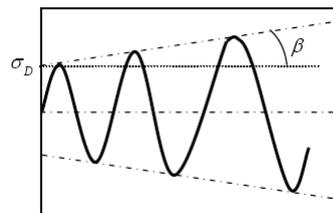
TD14 : Calcul de durée de vie en fatigue à partir de la courbe de Wöhler

Un élément de structure subit un chargement cyclique pour amorcer une fissure détectable par les moyens de CND. La courbe de Wöhler à l'amorçage à contrainte moyenne $\sigma_m=0$ et à amplitude de contrainte σ_a fixée est donnée par :

$$N = \frac{A}{(\sigma_a - \sigma_D)^2} \quad \text{avec } A=10^8 \text{ et } \sigma_D = 200 \text{ MPa}$$

Déterminer les nombres de cycles à l'amorçage pour des amplitudes de contraintes $\sigma_1 = 300 \text{ MPa}$ et $\sigma_2 = 250 \text{ MPa}$. En déduire le nombre de cycles à l'amorçage si l'élément de structure est soumis à un spectre de charge constitué de deux cycles d'amplitude σ_1 et 3 cycles d'amplitude σ_2 . Calculer le nombre de cycles à l'amorçage si l'amplitude augmente progressivement :

$$\sigma_i = \sigma_D + \beta N_i \quad \text{avec } \beta = 10^{-2} \text{ MPa/cycle}$$



- Les nombres de cycles N_1 et N_2 nécessaires pour amorcer une fissure aux amplitudes σ_1 et σ_2 , se déduisent directement de la courbe de Wöhler :

$$N_1 = \frac{A}{(\sigma_1 - \sigma_D)^2} = \frac{10^8}{100^2} = 10^4 \text{ cycles}$$

$$N_2 = \frac{A}{(\sigma_2 - \sigma_D)^2} = \frac{10^8}{50^2} = 4 \cdot 10^4 \text{ cycles}$$

- Le spectre constitué de 2 cycles σ_1 et 3 cycles σ_2 engendre un endommagement élémentaire $D_i = 2/N_1 + 3/N_2$. Si N_s est le nombre de spectres à l'amorçage, on a d'après la règle de cumul linéaire de Miner :

$$\sum D_i = N_s \cdot D_i = 1$$

$$\Rightarrow N_s = \frac{1}{2/N_1 + 3/N_2} = 3636 \text{ spectres}$$

Chaque spectre étant constitué de 5 cycles, il vient $N_{\text{cycles}} = 5N_s = 18182 \text{ cycles}$

- Pour le chargement croissant $\sigma_i = \sigma_D + \beta N_i$, l'endommagement élémentaire est :

$$dD_i = \frac{dN_i}{N_i} = \frac{d\sigma_i}{\beta N_i} \text{ où } N_i = \frac{A}{(\sigma_i - \sigma_D)^2} \text{ est le nombre de cycles à l'amorçage à } \sigma_i$$

Selon la règle de Miner, on a à l'amorçage $\int \frac{dN_i}{N_i} = 1$ soit :

$$\int_{\sigma_D}^{\sigma^*} \frac{(\sigma_i - \sigma_D)^2 d\sigma_i}{\beta A} = 1 \Rightarrow \sigma^* = (3\beta A)^{1/3} + \sigma_D \approx 344 \text{ MPa}$$

σ^* est l'amplitude de contrainte atteinte au moment de l'amorçage. Le nombre de cycles N^* à l'amorçage est alors donné par :

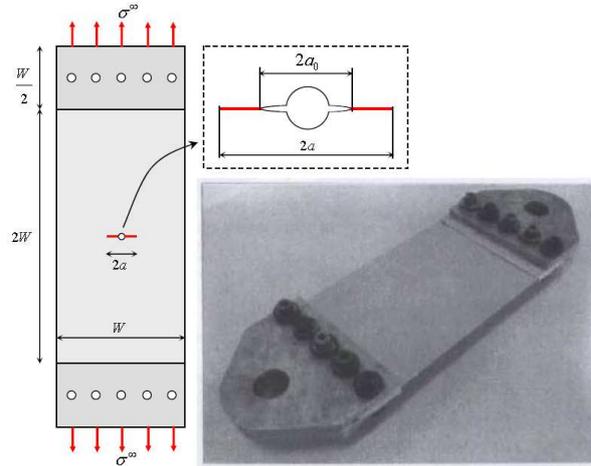
$$N^* = \frac{\sigma^* - \sigma_D}{\beta} = 14422 \text{ cycles}$$

Fissuration par fatigue

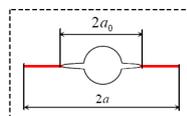
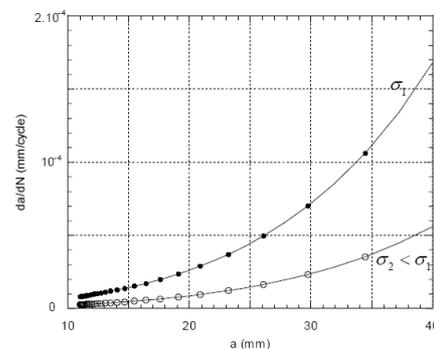
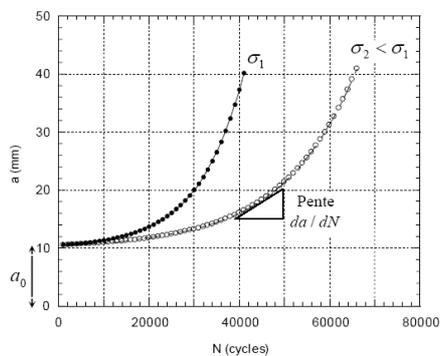
Les éprouvettes les plus utilisées pour les essais de fissuration en fatigue sont à ligament long (CT, CCT ...). Ces éprouvettes sont normalisées. Dans le cas de l'éprouvette CCT, des bonnes conditions d'essai exigent une épaisseur $\sim W/20$, le trou central $\sim W/30$ et l'entaille $2a_0 \sim W/10$ où W est la largeur de la plaque.

La photo ci-contre montre l'éprouvette CCT avec le dispositif de fixation entre les mors de la machine de fatigue.

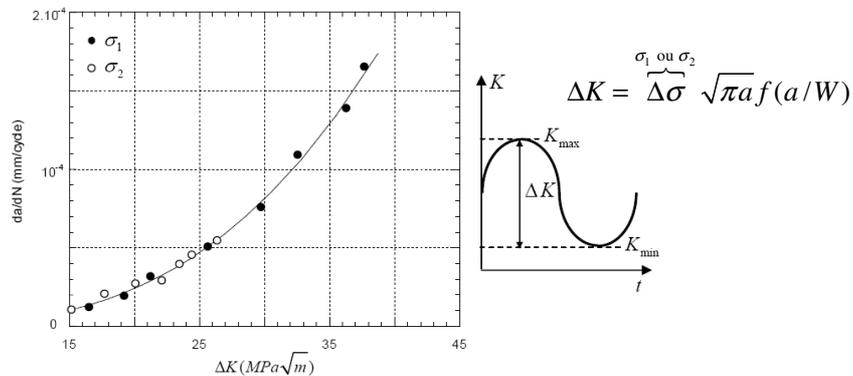
La longueur de fissure est mesurée régulièrement en cours d'essai à l'aide de méthodes optique ou électrique.



La manière la plus simple de représenter la progression des fissures, consiste à rapporter leur longueur a en fonction du nombre de cycles N subit par l'éprouvette d'essai. La description de la vitesse de fissuration da/dN en fonction de a est une autre approche. La figure ci-dessous donne un exemple de résultats issus de ces deux approches pour des essais à amplitudes différentes (σ_1 et σ_2) mais à même rapport de charge $R = \sigma^{\min} / \sigma^{\max}$.



Lorsqu'on présente les résultats précédents en décrivant la vitesse de fissuration da/dN en fonction de l'amplitude de l'intensité des contraintes $\Delta K = K_{max} - K_{min}$, on aboutit à une courbe unique :



Ce résultat montre bien que le paramètre ΔK est le plus approprié pour décrire la fissuration en fatigue.
Le FIC ΔK est la force motrice.

La figure précédente montre que les vitesses de fissuration en fonction de l'amplitude ΔK du FIC sont décrites par une courbe unique pour deux essais effectués à même rapport de charge R mais à des amplitudes de contraintes σ_1 et σ_2 différentes.

Ce résultat permet d'énoncer le principe de similitude relatif au FIC : lorsque deux fissures sollicitées à même rapport de charge, sont soumises à la même amplitude ΔK du FIC, les vitesses de fissuration sont alors les mêmes.

Le rapport de charge est défini par :

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{K_{min}}{K_{max}} \text{ avec } K_{max} = \sigma_{max} \sqrt{\pi a} f(a/W) \text{ et } K_{min} = \sigma_{min} \sqrt{\pi a} f(a/W)$$

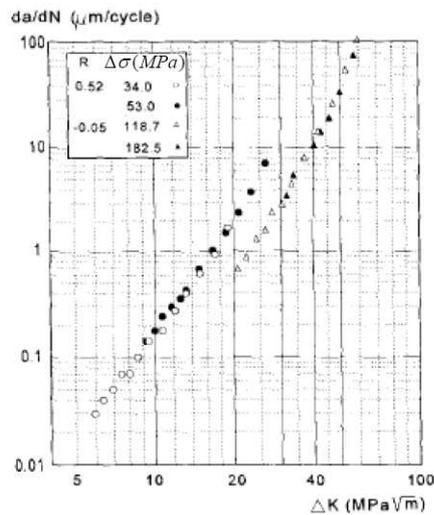
$f(a/W)$ est la fonction complaisance de l'éprouvette d'essai

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} = K_{max} (1 - R) \Rightarrow K_{max} = \frac{\Delta K}{1 - R} \text{ et } K_{min} = \frac{R \Delta K}{1 - R}$$

On peut donc écrire :

$$\frac{da}{dN} = f(K_{max}, K_{min}) \text{ ou } \frac{da}{dN} = f(\Delta K, R)$$

En général les courbes de fissuration sont représentées en échelle bi-logarithmique. Le résultat suivant montre un exemple de courbes de fissuration obtenues sur un alliage d'aluminium* : celles-ci sont issues d'essais sur éprouvettes sollicitées avec deux rapports de charge R et deux amplitudes de contraintes pour chaque valeur de R .

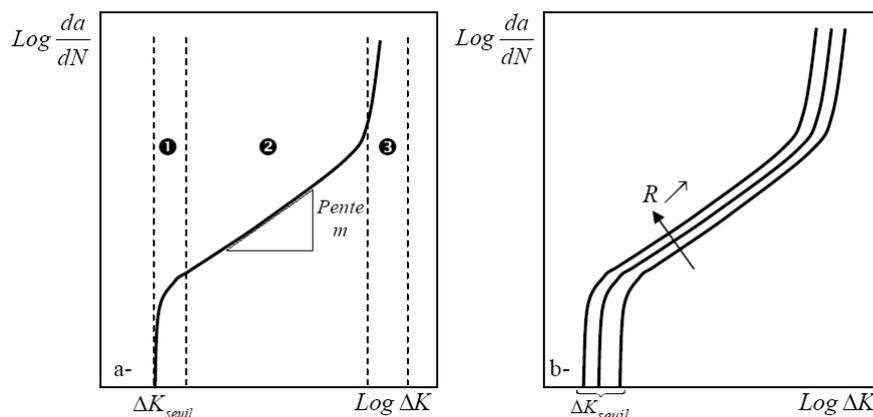


Ces résultats montrent bien que les courbes de fissuration dépendent du rapport de charge.

A même ΔK , la vitesse de propagation croît avec R , i.e. da/dN est plus rapide lorsque le niveau moyen de la contrainte cyclique, σ_m , augmente.

* J. Schijve, Fatigue of Structures and Materials, Kluwer Academic Publishers, 2001

L'allure complète d'une courbe de fissuration en fatigue est schématisée ci-dessous pour différents rapports de charge R .



- Le domaine ① des faibles vitesses, obtenu par des essais à ΔK décroissant : cette procédure permet de déterminer la valeur seuil de l'amplitude du FIC, ΔK_{seuil} , en dessous de laquelle, une fissure, présente dans un matériau, ne se propage plus.

La valeur de ΔK_{seuil} varie avec R et le milieu environnant. La relation empirique la plus utilisée pour décrire ces variations est de la forme :

$$\Delta K_{seuil} = (1-R)^\gamma \Delta K_0 \quad \text{Relation de Klesnil et Lucas}$$

Où ΔK_0 est la valeur seuil pour $R=0$. L'exposant γ est compris entre 0 et 1 : il est proche de 1 lorsque l'essai de fatigue est conduit dans des environnements agressifs et proche de 0 pour les milieux inertes.

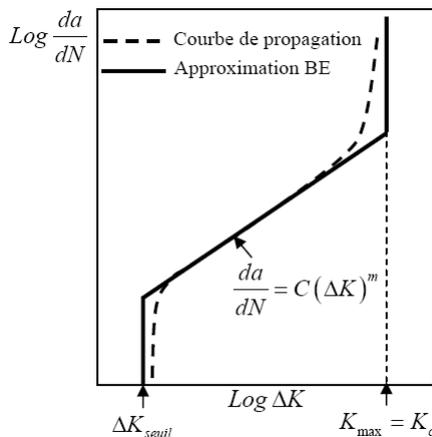
- Le domaine ② des vitesses moyennes, obtenu par des essais à ΔK croissant : la vitesse de fissuration dans ce domaine est le plus souvent décrite par la relation empirique de Paris :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m$$

C et m sont des constantes qui dépendent du matériau, du milieu environnant et du rapport de charge R .

- Le domaine ③ des vitesses très élevées où les valeurs de K_{max} se rapprochent de la ténacité K_c du matériau.

Dans les bureaux d'étude, on considère en première approximation que la courbe de propagation peut être décrite par une relation de Paris étendue au domaine ① et ③ selon la procédure indiquée sur la figure Ci-dessous :



Extension du domaine de Paris $da/dN = C(\Delta K)^m$
entre $\Delta K = \Delta K_{seuil}$ et $K_{max} = K_c$

La durée de vie est calculée par intégration de la relation suivante :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{C \Delta K^m}$$

Avec les longueurs a_0 et a_c déterminées à partir des égalités suivantes:

$$\Delta K_{seuil} = \Delta \sigma \sqrt{\pi a_0} f(a_0/W)$$

$$K_{Ic} = \sigma_{max} \sqrt{\pi a_c} f(a_c/W)$$

Endommagement en propagation par fatigue

Lorsqu'un élément de structure fissuré est soumis à un chargement d'amplitude de contrainte constante $\Delta\sigma$, la durée de vie est calculée par une relation de type :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{C\Delta K^m} \quad \text{où } \Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi a}f(a/W)$$

Si l'élément est soumis à un spectre de charge comportant plusieurs amplitudes $\Delta\sigma_i$, on procède de la façon suivante :

- On calcule l'accroissement de longueur de fissure Δa_i dû à chaque amplitude $\Delta\sigma_i$ appliquée pendant ΔN_i cycles, soit :

$$\Delta a_i = C(\Delta K_i)^m \Delta N_i = C(\Delta\sigma_i\sqrt{\pi a_i}f(a_i/W))^m \Delta N_i$$

Le nombre de cycles $\Delta N_{\text{spectre}}$ subis pendant une période du spectre de charge et l'accroissement de longueur de fissure $\Delta a_{\text{spectre}}$ correspondant, sont donnés par :

$$\Delta N_{\text{spectre}} = \sum_i \Delta N_i \quad \text{et} \quad \Delta a_{\text{spectre}} = \sum_i \Delta a_i$$

L'accroissement de longueur de fissure $\Delta a_{\text{spectre}}$ reste en général faible par rapport à la longueur de fissure a , si bien que l'on peut déterminer la vitesse moyenne da/dN_{spectre} sur le spectre de charge :

$$\left. \frac{da}{dN} \right)_{\text{spectre}} = \frac{\Delta a_{\text{spectre}}}{\Delta N_{\text{spectre}}} = \frac{\sum_i \Delta a_i}{\sum_i \Delta N_i} = \frac{\sum_i C(\Delta\sigma_i\sqrt{\pi a_i}f(a_i/W))^m \Delta N_i}{\sum_i \Delta N_i}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{da}{dN} \right)_{\text{spectre}} = C(\sqrt{\pi a}f(a/W))^m \frac{\sum_i (\Delta\sigma_i)^m \Delta N_i}{\sum_i \Delta N_i}$$

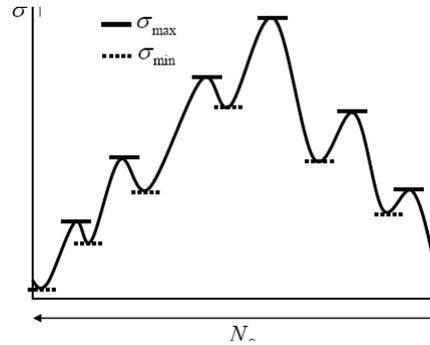
Ce calcul repose sur l'utilisation d'une loi de cumul linéaire (de type Miner) des accroissements élémentaires Δa_i de fissure.

On calcule ensuite la durée de vie en intégrant la relation précédente.

Lorsque le spectre de chargement n'est pas décomposable en cycles à $\Delta\sigma$ fixée, on utilise une approche, proposée par Barsom*, qui consiste à relier la vitesse de propagation da/dN à une amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK_{mS} moyennée (moyenne des carrés des contraintes) sur une période du spectre de N_S cycles :

$$\Delta K_{mS} = \overbrace{\Delta\sigma_{mS}^{\max} - \sigma_{mS}^{\min}}^{\sigma_{mS}^{\max} - \sigma_{mS}^{\min}} \sqrt{\pi a} f(a/W)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \sigma_{mS}^{\max} = \sqrt{\frac{1}{N_S} \sum_1^{N_S} \sigma_{\max}^2} \\ \sigma_{mS}^{\min} = \sqrt{\frac{1}{N_S} \sum_1^{N_S} \sigma_{\min}^2} \end{cases}$$



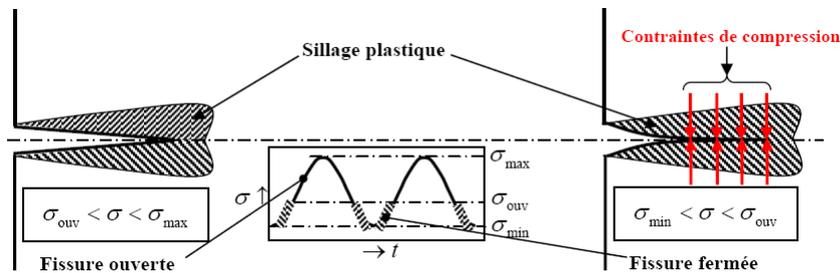
On détermine, à partir de ces contraintes, R_{mS} le rapport de charge moyen sur le spectre :

$$R_{mS} = \frac{\sigma_{mS}^{\min}}{\sigma_{mS}^{\max}} \Rightarrow \frac{da}{dN} = C(\Delta K_{mS})^m \text{ et on calcule } N_f \text{ par intégration}$$

*J.M. Barsom, ASTM STP 595, p. 217, 1976

Fermeture de fissure en bas de cycle de fatigue

On a vu qu'une zone plastifiée se forme à l'extrémité d'une fissure. Lorsqu'une fissure de fatigue se propage, il se forme alors un sillage plastique autour de la fissure. Au cours d'un cycle de chargement, la décharge élastique du matériau entraîne des contraintes de compression sur le sillage plastique : c'est le phénomène de fermeture découvert par Elber* en 1971.



Il s'ensuit que la fissure reste fermée pendant une partie du bas de cycle jusqu'à la contrainte σ_{ouv} . L'amplitude de contrainte qui contribue effectivement à la propagation est alors :

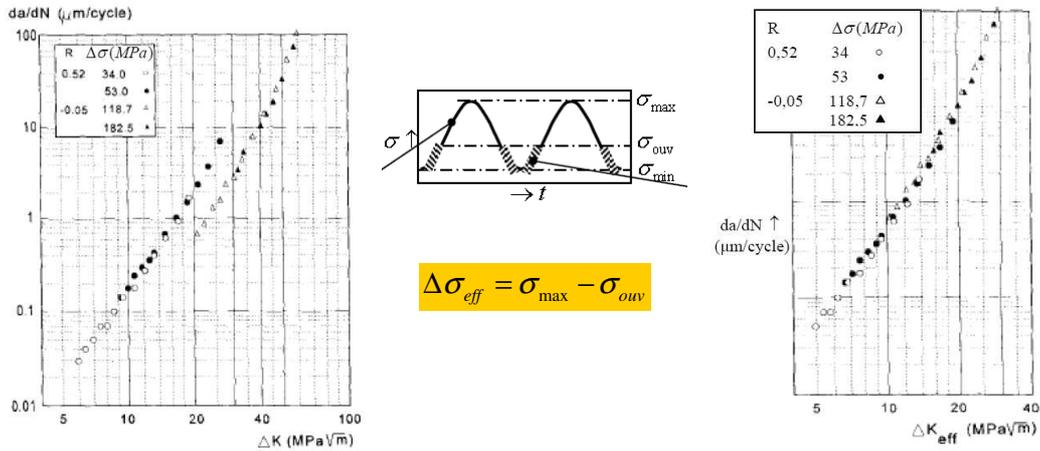
$$\Delta\sigma_{eff} = \sigma_{\max} - \sigma_{ouv}$$

$$\Rightarrow \Delta K_{eff} = K_{\max} - K_{ouv}$$

*W. Elber, ASTM STP 486, p. 230-242, 1971

Elber a proposé de décrire les courbes de propagation en termes de ΔK_{eff} , soit pour le domaine de Paris :

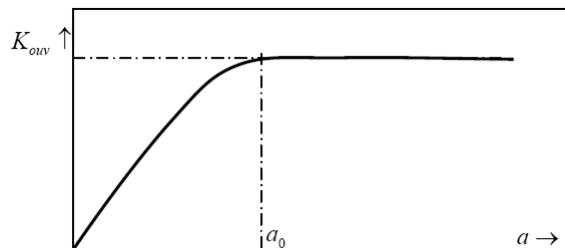
$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_{eff})^m \quad \text{avec} \quad \Delta K_{eff} = \Delta \sigma_{eff} \sqrt{\pi a} f(a/W)$$



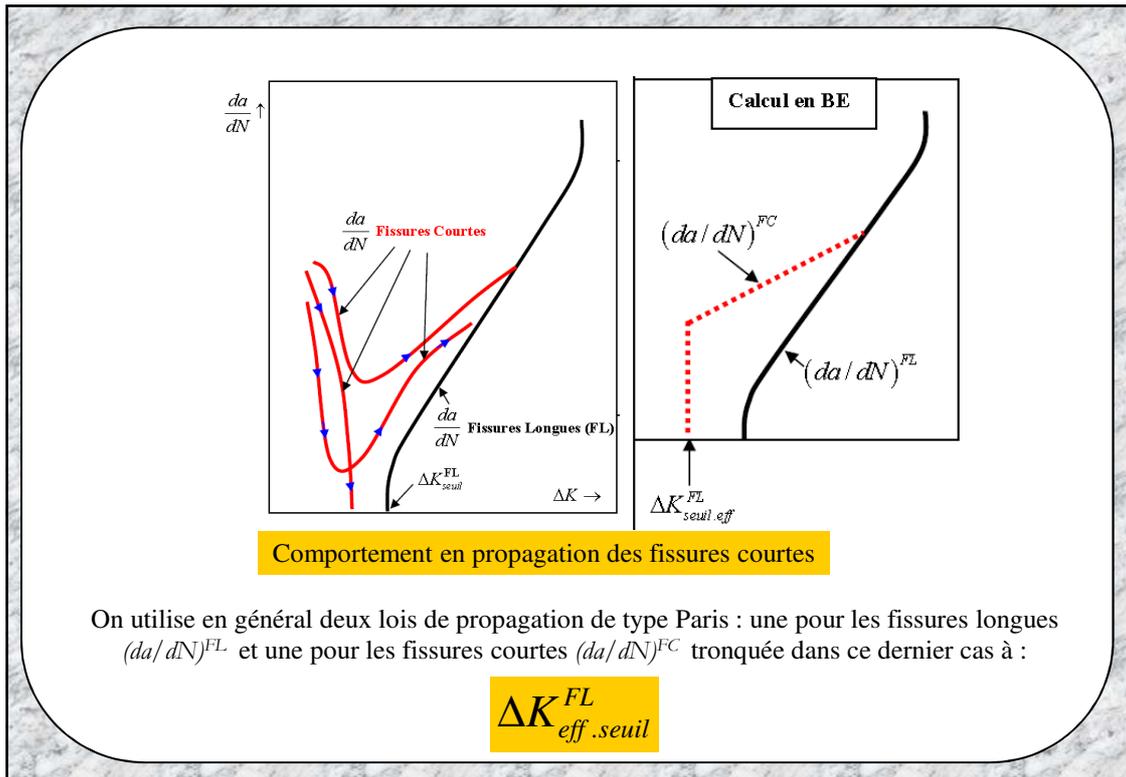
Ces résultats montrent que l'influence du rapport de charge disparaît.

Propagation des fissures courtes de fatigue

Il faut que le sillage plastique autour d'une fissure soit suffisamment long pour que les contraintes de compression en bas de cycle puissent s'exercer. La figure suivante montre schématiquement comment évolue le FIC à l'ouverture de la fissure K_{ovp} en fonction de la longueur fissurée a .



L'expérience montre que les fissures dont la longueur est inférieure à a_0 (dites fissures courtes) se propagent plus vite et à des niveaux de ΔK inférieurs à ΔK_{seuil} .



TD15 : Calcul de durée de vie en fatigue à partir des courbes de propagation

1- Dans un élément de structure en acier de ténacité $K_{IC}=70MPa\sqrt{m}$, les essais de propagation, à partir d'une longueur initiale $a_0=0,2mm$, ont donné les résultats suivants :

$$\frac{da}{dN} = 7,72 \cdot 10^{-11} \Delta K_R^{2,3} \quad \text{où} \quad \Delta K_R = \frac{1-bR}{1-R} \Delta K \quad \text{avec} \quad \begin{cases} b=0,2 & \text{à } R < 0 \\ b=1 & \text{à } R \geq 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} da/dN & \text{en } m/\text{cycle} \\ \Delta K & \text{en } MPa\sqrt{m} \end{cases}$$

Pour le calcul du FIC, on adopte la relation $K = \sigma\sqrt{\pi a}$

Un lot d'éléments identiques subissent, après amorçage d'une fissure de longueur a_0 , différents chargements. Déterminer la durée de vie N_p pour les chargements suivants :

- a- $\Delta\sigma = 200MPa - R = 0$ b- $\Delta\sigma = 360MPa - R = -1$
- c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200MPa - R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360MPa - R = -1$
- d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150MPa - R = 0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300MPa - R = -0,5$

- La durée de vie se calcule par intégration entre la longueur initiale $a_0 = 0,2mm$ et une longueur critique a_c qu'il convient de déterminer pour chaque chargement considéré :

$$K_{Ic} = \sigma_{\max} \sqrt{\pi a_c} = \frac{\Delta\sigma}{1-R} \sqrt{\pi a_c} \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(1-R)K_{Ic}}{\Delta\sigma} \right)^2$$

| | |
|------------------------------------|------------------------------|
| $\Delta\sigma = 200MPa - R = 0$ | $\Rightarrow a_c = 39,0mm$, |
| $\Delta\sigma = 360MPa - R = -1$ | $\Rightarrow a_c = 48,1mm$, |
| $\Delta\sigma = 150MPa - R = 0,5$ | $\Rightarrow a_c = 17,3mm$, |
| $\Delta\sigma = 300MPa - R = -0,5$ | $\Rightarrow a_c = 39,0mm$. |

a- $\Delta\sigma = 200MPa - R = 0$ $\frac{da}{dN} = 7,72 \cdot 10^{-11} (200\sqrt{\pi a})^{2,3} = C_1 a^{1,15}$ où $C_1 = 5,65 \cdot 10^{-5}$

$$N_p = \int_{0,2 \cdot 10^{-3}}^{39 \cdot 10^{-3}} \frac{da}{C_1 a^{1,15}} = \frac{1}{0,15 C_1} \left(\frac{1}{(0,2 \cdot 10^{-3})^{0,15}} - \frac{1}{(39 \cdot 10^{-3})^{0,15}} \right) \Rightarrow N_p = 2,32 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

b- $\Delta\sigma = 360MPa - R = -1$ $\frac{da}{dN} = 7,72 \cdot 10^{-11} (0,6 \cdot 360\sqrt{\pi a})^{2,3} = C_2 a^{1,15}$

où $C_2 = 6,74 \cdot 10^{-5}$

$$N_p = \frac{1}{0,15 C_2} \left(\frac{1}{(0,2 \cdot 10^{-3})^{0,15}} - \frac{1}{(48,1 \cdot 10^{-3})^{0,15}} \right) \Rightarrow N_p = 1,99 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

- c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200MPa - R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360MPa - R = -1$; on calcule la vitesse moyenne sur le spectre, soit :

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{\text{moy}} = 7,72 \cdot 10^{-11} \left(\frac{200^{2,3} + 2(0,6 \cdot 360)^{2,3}}{3} \right) \pi^{1,15} a^{1,15} = C_3 a^{1,15} \text{ où } C_3 = 6,37 \cdot 10^{-5}$$

$$N_p = \frac{1}{0,15 C_3} \left(\frac{1}{(0,2 \cdot 10^{-3})^{0,15}} - \frac{1}{(39 \cdot 10^{-3})^{0,15}} \right) \Rightarrow N_p = 2,05 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

- d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150MPa - R = 0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300MPa - R = -0,5$

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{\text{moy}} = 7,72 \cdot 10^{-11} \left(\frac{3 \cdot 150^{2,3} + 5 \left(\frac{1,1}{1,5} \cdot 300 \right)^{2,3}}{8} \right) \pi^{1,15} a^{1,15} = C_4 a^{1,15} \text{ où } C_4 = 5,49 \cdot 10^{-5}$$

$$N_p = \frac{1}{0,15 C_4} \left(\frac{1}{(0,2 \cdot 10^{-3})^{0,15}} - \frac{1}{(17,3 \cdot 10^{-3})^{0,15}} \right) \Rightarrow N_p = 2,13 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

2- La propagation en fatigue dans l'acier de l'exemple précédent est plus rapide pour les fissures courtes ($0,2\text{mm} < a < 1\text{mm}$). La loi de fissuration pour le régime fissures courtes (FC) est :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{FC} = 10^{-9} (\Delta K_R^{FC})^2 \quad \text{avec} \quad \Delta K_R^{FC} = \left(\frac{\Delta K}{1-cR}\right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} c=1 & \text{à } R < 0 \\ c=0 & \text{à } R \geq 0 \end{cases}$$

Mêmes questions que celles de l'exemple 1-

- a- $\Delta\sigma = 200\text{MPa} - R = 0$ b- $\Delta\sigma = 360\text{MPa} - R = -1$
 c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200\text{MPa} - R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360\text{MPa} - R = -1$
 d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150\text{MPa} - R = 0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300\text{MPa} - R = -0,5$

a- $\Delta\sigma = 200\text{MPa} - R = 0$ $\left(\frac{da}{dN}\right)_{FC} = 10^{-9} (200\sqrt{\pi a})^2 = C'_1 a$ où $C'_1 = 1,26 \cdot 10^{-4}$

$$N_p = \int_{0,2 \cdot 10^{-3}}^{1 \cdot 10^{-3}} \frac{da}{C'_1 a} + \int_{1 \cdot 10^{-3}}^{39 \cdot 10^{-3}} \frac{da}{C'_1 a^{1,15}} = \frac{1}{C'_1} \ln \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15 C'_1} \left(\frac{1}{(1 \cdot 10^{-3})^{0,15}} - \frac{1}{(39 \cdot 10^{-3})^{0,15}} \right)$$

$$\Rightarrow N_p = 1,53 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

b- $\Delta\sigma = 360\text{MPa} - R = -1$ $\left(\frac{da}{dN}\right)_{FC} = 10^{-9} \left(\frac{360}{2} \sqrt{\pi a}\right)^2 = C'_2 a$ où $C'_2 = 1,02 \cdot 10^{-4}$

$$N_p = \frac{1}{C'_2} \ln \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15 C'_2} \left(\frac{1}{(1 \cdot 10^{-3})^{0,15}} - \frac{1}{(48,1 \cdot 10^{-3})^{0,15}} \right) \quad \Rightarrow N_p = 1,39 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200\text{MPa} - R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360\text{MPa} - R = -1$; on calcule la vitesse moyenne sur le spectre pour les deux lois de propagation (fissures courtes et longues), soit :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{moy}^{FC} = 10^{-9} \left(\frac{200^2 + 2(360/2)^2}{3} \right) \pi a = C'_3 a \quad \text{où} \quad C'_3 = 1,10 \cdot 10^{-4}$$

$$N_p = \frac{1}{C'_3} \ln \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15 C'_3} \left(\frac{1}{(1 \cdot 10^{-3})^{0,15}} - \frac{1}{(39 \cdot 10^{-3})^{0,15}} \right) \quad \Rightarrow N_p = 1,39 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150\text{MPa} - R = 0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300\text{MPa} - R = -0,5$

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{\text{moy}}^{\text{FC}} = 10^{-9} \left(\frac{3 \cdot 150^2 + 5(300/1,5)^2}{8} \right) \pi a = C'_4 a \quad \text{où } C'_4 = 1,05 \cdot 10^{-4}$$

$$N_p = \frac{1}{C'_4} \ln \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,15 C'_4} \left(\frac{1}{(1 \cdot 10^{-3})^{0,15}} - \frac{1}{(17,3 \cdot 10^{-3})^{0,15}} \right) \Rightarrow N_p = 1,34 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

3- L'acier précédent présente un seuil de non fissuration ΔK_{seuil} .

Mêmes question que celles de 2-

$$\Delta K_{\text{seuil}} = 4,5\text{MPa}\sqrt{m}$$

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{\text{FC}} = 10^{-9} (\Delta K_R^{\text{FC}})^2 \quad \text{avec} \quad \Delta K_R^{\text{FC}} = \left(\frac{\Delta K}{1 - cR} \right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} c = 1 & \text{à } R < 0 \\ c = 0 & \text{à } R \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{da}{dN} = 7,72 \cdot 10^{-11} \Delta K_R^{2,3} \quad \text{où} \quad \Delta K_R = \frac{1 - bR}{1 - R} \Delta K \quad \text{avec} \quad \begin{cases} b = 0,2 & \text{à } R < 0 \\ b = 1 & \text{à } R \geq 0 \end{cases}$$

a- $\Delta\sigma = 200\text{MPa} - R = 0$

b- $\Delta\sigma = 360\text{MPa} - R = -1$

c- 1 cycle $\Delta\sigma = 200\text{MPa} - R = 0$ suivi 2 cycles $\Delta\sigma = 360\text{MPa} - R = -1$

d- 3 cycles $\Delta\sigma = 150\text{MPa} - R = 0,5$ suivis de 5 cycles $\Delta\sigma = 300\text{MPa} - R = -0,5$

Il faut s'assurer que les chargements sont endommageants pour la longueur de fissure initiale $a_0 = 0,2\text{mm}$, c'est-à-dire que $\Delta K_R^{\text{FC}}(a = a_0) > \Delta K_{\text{seuil}}$.

a- $\Delta\sigma = 200\text{MPa} - R = 0$ $\Delta K_R^{\text{FC}}(a_0) = 200 \sqrt{\pi a_0} = 5,01\text{MPa}\sqrt{m} > \Delta K_{\text{seuil}}$, donc pas

de changement par rapport à l'exemple 3 (même durée de vie). Il en est de même pour

b- et c- ($180 \sqrt{\pi a_0} = 4,51\text{MPa}\sqrt{m} > \Delta K_{\text{seuil}}$)

d- $\Delta\sigma = 150\text{MPa} - R = 0,5$ $\Delta K_R^{FC}(a_0) = 150\sqrt{\pi a_0} = 3,76\text{MPa}\sqrt{m} < \Delta K_{seuil}$; ce niveau devient endommageant pour une longueur a_1 telle que $150\sqrt{\pi a_1} = \Delta K_{seuil}$, soit $a_1 = 0,286\text{mm}$.

$$\Delta\sigma = 300\text{MPa} - R = -0,5 \quad \Delta K_R^{FC}(a_0) = \frac{300}{1,5}\sqrt{\pi a_0} = 5,01\text{MPa}\sqrt{m} > \Delta K_{seuil}.$$

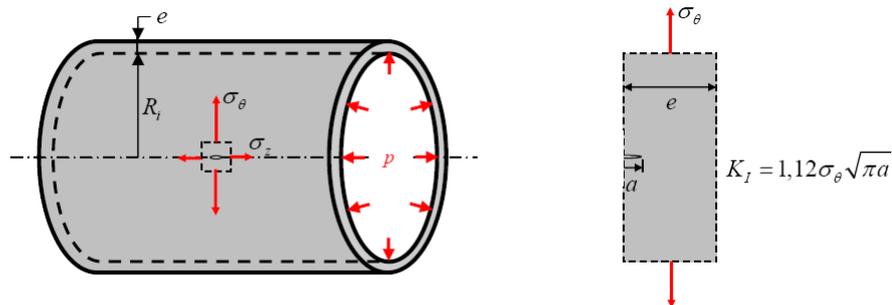
$$\text{Pour } a_0 < a < a_1, \quad \left(\frac{da}{dN}\right)_{moy}^{FC} = 10^{-9} \left(\frac{5(300/1,5)^2}{8}\right) \pi a = C_4^* a \text{ avec } C_4^* = 7,85 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Pour } a_1 < a < 1\text{mm}, \quad \left(\frac{da}{dN}\right)_{moy}^{FC} = 10^{-9} \left(\frac{3 \cdot 150^2 + 5(300/1,5)^2}{8}\right) \pi a = C_4' a$$

$$N_p = \frac{1}{C_4^*} \ln \frac{0,286}{0,2} + \frac{1}{C_4'} \ln \frac{1}{0,286} + \frac{1}{0,15 C_4} \left(\frac{1}{(1 \cdot 10^{-3})^{0,15}} - \frac{1}{(17,3 \cdot 10^{-3})^{0,15}} \right)$$

$$\Rightarrow N_p = 1,36 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

4- Un réservoir cylindrique de rayon intérieur $R_i = 1\text{m}$ et d'épaisseur $e = 4\text{cm}$, est soumis à une pression interne p (figure ci-dessous). Le dimensionnement devra assurer à la fois un comportement élastique du réservoir et une résistance à la propagation brutale d'une éventuelle fissure; on prendra comme coefficient de sécurité $C_s = 2$.



La fabrication du réservoir peut se faire avec trois aciers (A, B, C) dont les valeurs de la limite d'élasticité σ_E et de la ténacité K_{Ic} sont :

| Aciers | σ_E (MPa) | K_{Ic} (MPa \sqrt{m}) |
|--------------|------------------|----------------------------|
| A : 4340 | 866 | 99,3 |
| B : 4335 | 1299 | 72,9 |
| C : Maraging | 1732 | 56,1 |

a- Le critère pour le dimensionnement en contraintes, qui fait abstraction de l'existence d'éventuelles fissures, est celui de Mises :

$$\sigma_{\theta}^2 - \sigma_{\theta}\sigma_z + \sigma_z^2 = \left(\frac{\sigma_E}{C_s}\right)^2$$

Déterminer en fonction de σ_E , R_i et e , la pression admissible p_{adm} .

Donner la valeur de p_{adm} pour chacun des aciers.

b- Le dimensionnement en rupture qui tient compte de l'existence d'une éventuelle fissure de profondeur a , est :

$$K_I \leq K_{I_C} / C_s$$

Donner l'expression de la pression admissible p_{adm} en fonction de la profondeur fissurée a et de K_{I_C} . Pour quelles longueurs de fissure a_0 , les deux dimensionnements sont-ils équivalents ?

Représenter schématiquement dans un diagramme p en fonction de a , le domaine de sécurité pour chacun des 3 aciers.

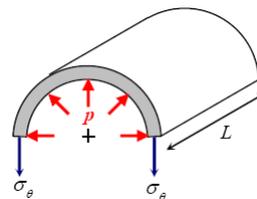
c- Après fabrication, le cylindre subit un contrôle non destructif dont la limite de détection est $a_{LD} = 2mm$. Il est ensuite soumis, pour le test de résistance, à une pression ultime $P_u = 32MPa$.

Quels aciers faut-il choisir pour éviter l'éclatement en cours de test ?

a- On calcule dans un premier temps les contraintes σ_{θ} et σ_z en fonction de la pression p et des dimensions du réservoir :

$$\sigma_{\theta} 2eL = p 2R_i L \Rightarrow \sigma_{\theta} = \frac{pR_i}{e}$$

$$\sigma_z 2\pi R_i e = p \pi R_i^2 \Rightarrow \sigma_z = \frac{pR_i}{2e} = \frac{\sigma_{\theta}}{2}$$



Le critère de Mises $\sigma_{\theta}^2 - \sigma_{\theta}\sigma_z + \sigma_z^2 = \sigma_E^2 / 4$ donne :

$$\left(\frac{p_{adm} R_i}{e}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] = \frac{\sigma_E^2}{4} \quad \text{soit} \quad p_{adm} = \frac{e}{\sqrt{3}R_i} \sigma_E = 2,31 \cdot 10^{-2} \sigma_E$$

| Aciers | σ_E (MPa) |
|--------------|------------------|
| A : 4340 | 866 |
| B : 4335 | 1299 |
| C : Maraging | 1732 |

$$p_{adm}^{Acier A} = 20MPa$$

$$p_{adm}^{Acier B} = 30MPa$$

$$p_{adm}^{Acier C} = 40MPa$$

b- $K_I = 1,12\sigma_{\theta}\sqrt{\pi a} = 1,12\frac{pR_i}{e}\sqrt{\pi a}$. La pression admissible est atteinte lorsque

$$K_I = \frac{K_{Ic}}{2}, \text{ soit : } 1,12\frac{p_{adm}R_i}{e}\sqrt{\pi a} = \frac{K_{Ic}}{2} \Rightarrow p_{adm} = \frac{e}{2,24\sqrt{\pi R_i}} \frac{K_{Ic}}{\sqrt{a}} = 1,01 \cdot 10^{-2} \frac{K_{Ic}}{\sqrt{a}}$$

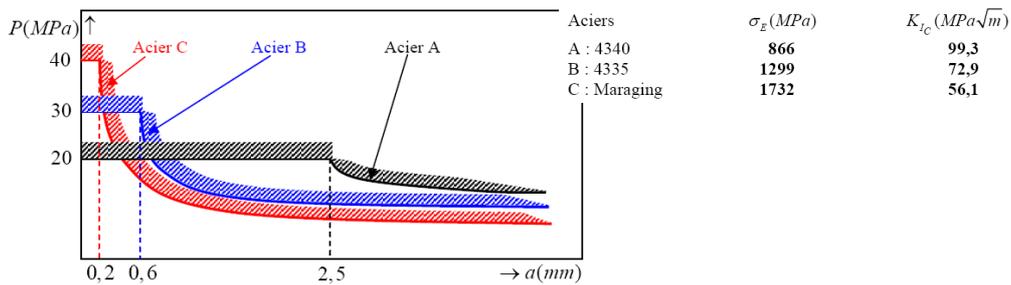
Les dimensionnements (en contrainte et en rupture) sont équivalents lorsque :

$$p_{adm} = \frac{e}{2,24\sqrt{\pi R_i}} \frac{K_{Ic}}{\sqrt{a_0}} = \frac{e}{\sqrt{3}R_i} \sigma_E \Rightarrow a_0 = \frac{3}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{2,24\sigma_E} \right)^2 = 1,90 \cdot 10^{-1} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_E} \right)^2$$

$$a_0^{\text{Acier A}} = 2,5 \text{ mm}$$

$$a_0^{\text{Acier B}} = 0,6 \text{ mm}$$

$$a_0^{\text{Acier C}} = 0,2 \text{ mm}$$



c- $P_u = 32 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{\theta u} = \frac{P_u R_i}{e} = 800 \text{ MPa} < \sigma_E$, les 3 aciers restent dans le domaine élastique.

| Aciers | σ_E (MPa) | K_{Ic} (MPa \sqrt{m}) |
|--------------|------------------|----------------------------|
| A : 4340 | 866 | 99,3 |
| B : 4335 | 1299 | 72,9 |
| C : Maraging | 1732 | 56,1 |

L'éclatement se produit lorsque $K_I = K_{Ic}$, c'est-à-dire lorsque $1,12\sigma_{\theta u}\sqrt{\pi a_c} = K_{Ic}$, soit :

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{1,12\sigma_{\theta u}} \right)^2 \Rightarrow a_c \text{ (m)} = 3,96 \cdot 10^{-7} \left(K_{Ic} \text{ (MPa}\sqrt{m}) \right)^2$$

$$a_c^{\text{Acier A}} = 3,91 \text{ mm}$$

$$a_c^{\text{Acier B}} = 2,11 \text{ mm}$$

$$a_c^{\text{Acier C}} = 1,25 \text{ mm}$$

$$a_{LD} = 2 \text{ mm}$$

$a_c^{\text{Acier C}} < a_{LD} = 2 \text{ mm}$, l'acier C risque d'éclater au cours du test.

Bon choix : Aciers A et B