



Master Matériaux-Mécanique-Structures-Procédés

CFMR - Chapitre 4

Intensification des contraintes à l'extrémité de fissures

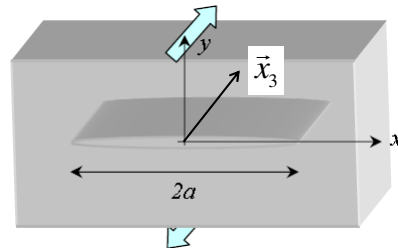
A. Zeghloul

SOMMAIRE

- Introduction – Concept de facteur d'intensité des contraintes K
 - Modes de sollicitation des fissures
 - Approche de Westergaard
 - Expression des champs de contrainte et de déplacement
- Définition du FIC K et expressions des champs de contrainte et de déplacement
 - Mode de cisaillement anti-plan
 - Principe de superposition
 - Zone plastifiée à fond de fissure
- Méthodes pratiques de calcul du FIC – Méthode des fonctions poids
 - Ténacité - FIC critique
 - Approche énergétique de Griffith
 - Relation entre énergie de Griffith et FIC K

Mode de cisaillement anti-plan

Lorsque une structure fissurée est en mode de cisaillement anti-plan, les lèvres de la fissure se déplacent, comme le montre la figure suivante, selon une direction perpendiculaire au plan (x,y) .



Le champ des déplacements est alors de la forme :

$$\vec{u} = u_3 \vec{x}_3 \quad \text{avec} \quad u_3 = u_3(x, y)$$

Les déformations en HPP sont données par :

$$\begin{cases} \epsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}u_{3,1} \\ \epsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2}u_{3,2} \end{cases}$$

$$\text{Loi de Hooke} \quad \begin{cases} \sigma_{13} = 2\mu\epsilon_{13} = \mu u_{3,1} \\ \sigma_{23} = 2\mu\epsilon_{23} = \mu u_{3,2} \end{cases}$$

$$\text{Equation d'équilibre} \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta u_3 = 0$$

La composante u_3 du déplacement est donc harmonique. Elle peut être alors considérée comme partie réelle ou imaginaire d'une fonction analytique.

L'approche de Westergaard peut être utilisée pour traiter le problème du cisaillement antiplan. Si on note Z_{III} la fonction de Westergaard associée à ce problème, on montre que le déplacement peut se mettre sous la forme :

$$u_3 = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \bar{Z}_{III}$$

Comme Z_{III} est homogène à une contrainte, \bar{Z}_{III} est homogène à une contrainte·longueur, si bien que \bar{Z}_{III}/μ est homogène à une longueur donc pouvant décrire un déplacement.

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \mu u_{3,1} \\ \sigma_{23} = \mu u_{3,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} g' = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} g = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} g \\ \operatorname{Im} g' = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} g = -\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{13} = \operatorname{Im} Z_{III} \\ \sigma_{23} = \operatorname{Re} Z_{III} \end{cases}$$

La fonction Z_{III} a la même forme que Z_I et Z_{II} :

$$Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}}$$

K_{III} est le facteur d'intensité des contraintes en mode III

Les contraintes et le déplacement en mode III sont alors donnés par :

$$u_3 = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \bar{Z}_{III}$$

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \operatorname{Im} Z_{III} \\ \sigma_{23} = \operatorname{Re} Z_{III} \end{cases}$$

$$Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}}$$

$$\begin{cases} \sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ u_3 = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

TD8 : Fissure sollicitée en mode I

A partir des formules donnant les contraintes élastiques à fond de fissure en fonction du facteur d'intensité des contraintes (FIC) K_I :

1°- Calculer σ_x , σ_y et σ_{xy} pour $\theta = 0, 45, 90, 135$ et 180° et à une distance r de l'extrémité de la fissure.

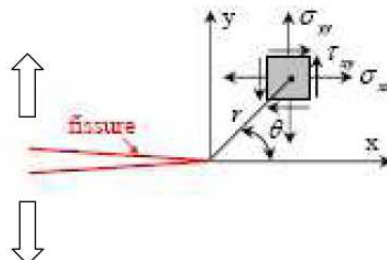
2°- Représenter l'état de contrainte autour de la fissure pour un petit élément découpé autour du point courant M , pour tous les angles considérés en 1°.

3°- Déterminer, en utilisant la construction de Mohr, les directions et les contraintes principales autour de la fissure. Quelles sont ces valeurs, en fonction de K_I et de r , pour $\theta = 45$ et 90° ?

4°- Pour quelle valeur de θ la contrainte normale est-elle maximale ?

Corrigé du TD8

Fissure sollicitée en mode d'ouverture



Les contraintes pour une fissure sollicitée en mode I, s'écrivent :

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad \text{ou} \quad \tilde{\sigma}_x = \sigma_x / \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

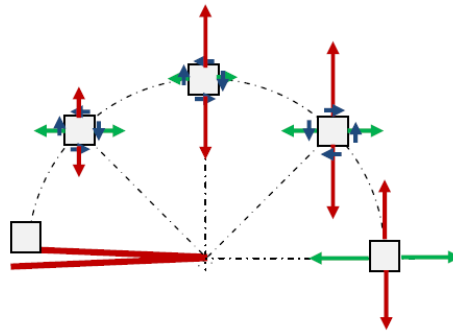
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad \text{ou} \quad \tilde{\sigma}_y = \sigma_y / \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad \text{ou} \quad \tilde{\tau}_{xy} = \tau_{xy} / \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

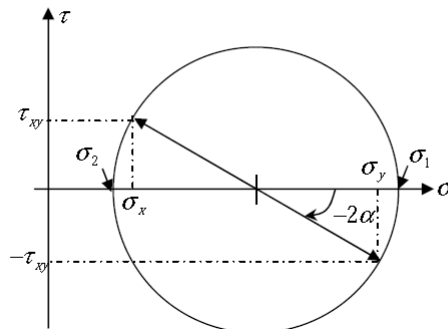
1- Calcul des $\tilde{\sigma}_y$ pour $\theta = 0, 45, 90, 135$ et 180°

θ	0	45	90	135	180
$\tilde{\sigma}_x$	1	0,60	0,35	0,52	0
$\tilde{\sigma}_y$	1	1,25	1,06	0,25	0
$\tilde{\tau}_{xy}$	0	0,135	-0,35	-0,33	0

2- Représentation de l'état de contrainte autour de la fissure



3- Construction de Mohr (α angle entre la direction principale $\bar{1}$ et la direction \bar{y})



Les contraintes principales, σ_1 (la plus élevée) et σ_2 , et l'angle α , sont donnés d'après la construction ci-dessus par :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\tan(-2\alpha) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} = -\cot\left(\frac{3\theta}{2}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \cot\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

Pour $\theta = 45^\circ$: $\sigma_1 = 1,28 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ $\sigma_2 = 0,57 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ $\alpha = 11,25^\circ$

Pour $\theta = 90^\circ$: $\sigma_1 = 1,21 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ $\sigma_2 = 0,21 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ $\alpha = -22,5^\circ$

4- Pour quelle valeur de θ la contrainte σ_1 est-elle maximale ?

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} - 1 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta = 60^\circ \quad \text{et} \quad \sigma_1 = 1,30 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

TD9 : Calcul du FIC K à partir de la fonction de Westergaard

I- Montrer que la fonction de Westergaard suivante décrit bien le chargement indiqué où la plaque infinie comporte une fissure de longueur $2a$. Calculer le FIC K_I à l'extrémité $x=a$

$$Z_I = \frac{\sigma^\infty z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

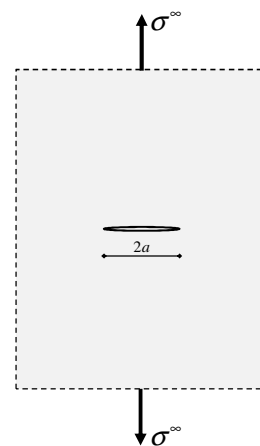
Corrigé du TD9

$$\sigma_y = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \quad Z_I' = \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{\sigma^\infty z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}}$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} Z_I = \sigma^\infty \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} Z_I' = 0 \quad \sigma_y = \sigma^\infty \quad \text{CL vérifiée}$$

$$K_I = \lim_{|z| \rightarrow a} \sqrt{2\pi(z-a)} Z_I(z) = \sigma^\infty \lim_{|z| \rightarrow a} \sqrt{2\pi(z-a)} \frac{z}{\sqrt{(z-a)(z+a)}}$$

$$\Rightarrow K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$$



II- Soit le chargement 1 d'une plaque infinie fissurée dont la fonction de Westergaard associée est:

$$Z_I = \frac{P}{\pi(z-b)} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{z^2 - a^2}} \text{ avec } P \text{ force concentrée en } z = b$$

1- Montrer que la fonction de Westergaard Z_I décrit bien le chargement 1

2- calculer le FIC K_I à l'extrémité $x=a$

3- Déterminer la fonction de Westergaard du chargement 2

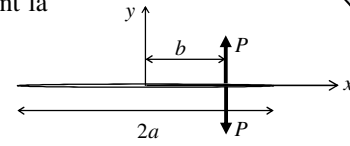
4- Calculer le FIC K_I du chargement 2 à l'extrémité $x=a$

5- Calculer à partir de 4- le FIC K_I à l'extrémité $x=a$ pour le chargement 3 où

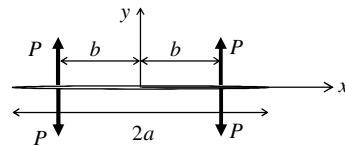
σ est une contrainte répartie.

6- Montrer à partir de 4- que la fn de Westergaard du chargement 3 est :

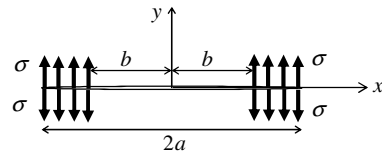
$$Z(z) = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \cos^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) - \cot^{-1} \left(\frac{b}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{a^2 - b^2}} \right) \right]$$



Chargement 1



Chargement 2



Chargement 3

Corrigé du TD9 suite

1- Montrer que la fonction de Westergaard Z_I décrit bien le chargement 1

$$\sigma_y = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z'$$

Lorsque $z \rightarrow b$ point d'application de la charge concentrée,

$$Z_I = \frac{iP}{\pi(z-b)}$$

$$Z_I = \frac{P}{\pi(z-b)} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{z^2 - a^2}}$$

La force concentrée P_y est donnée par

$$P_y = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \sigma_y \frac{1}{y} dx = \frac{P}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \operatorname{Re} \left[\frac{i}{x-b+iy} \right] dx$$

$$P_y = \frac{P}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \frac{y}{(x-b)^2 + y^2} dx$$

$$P_y = \frac{P}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\arctan \frac{x-b}{y} \right]_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} = \frac{2P}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \arctan \frac{\varepsilon}{y} = \frac{2P}{\pi} \frac{\pi}{2} = P$$

CL bien vérifiée

2- calculer le FIC K_I à l'extrémité $x=a$

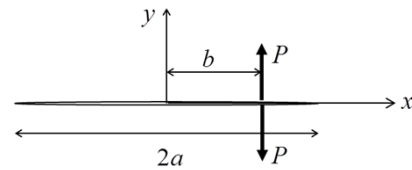
$$z-a=\zeta \Rightarrow Z_I = \frac{P}{\pi(\zeta+a-b)} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{\zeta(\zeta+2a)}}$$

$$K_I = \lim_{|\zeta| \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\zeta} Z_I(\zeta) = \sqrt{2\pi} \frac{P}{\pi(a-b)} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2a}}$$

$$\Rightarrow K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

ou plus simplement $K_I = \lim_{|z| \rightarrow a} \sqrt{2\pi(z-a)} Z_I(z) = \frac{\sqrt{2\pi} P}{\pi(a-b)} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2a}}$

$$\Rightarrow K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

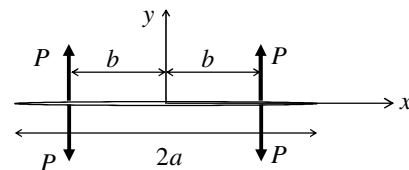


$$Z_I = \frac{P}{\pi(z-b)} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}$$

3- Déterminer la fonction de Westergaard du chargement 2

$$Z_I = \frac{P}{\pi(z-b)} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}} + \frac{P}{\pi(z+b)} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}$$

$$Z_I = \frac{P}{\pi} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}} \frac{2z}{z^2-b^2} = \frac{2Pz}{\pi(z^2-b^2)} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{z^2-a^2}}$$



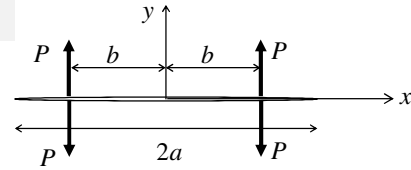
4- Calculer le FIC K_I à l'extrémité $x=a$

$$K_I = \lim_{|z| \rightarrow a} \sqrt{2\pi(z-a)} Z_I(z) = \sqrt{2\pi} \frac{2Pa}{\pi(a^2-b^2)} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2a}}$$

$$\Rightarrow K_I = \frac{2P}{\sqrt{a^2-b^2}} \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

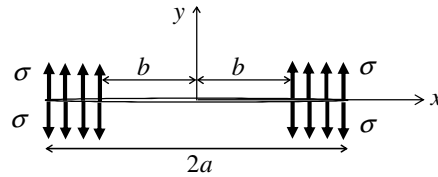
5- Calcul à partir de 4- du FIC K_I à l'extrémité $x=a$
pour le chargement 3 où σ est une contrainte répartie

$$\Rightarrow K_I = \frac{2P}{\sqrt{a^2 - b^2}} \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$



On remplace P par σdx , et on intègre de b à a

$$K_I = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_b^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$



$$K_I = -2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left[\arccos \frac{x}{a} \right]_b^a \quad \text{changement de variable } x = a \cos \alpha$$

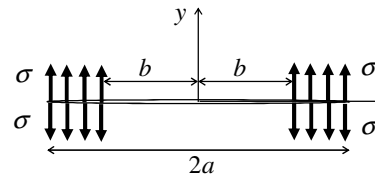
$$\Rightarrow K_I = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \arccos \frac{b}{a}$$

Remarque $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$ lorsque $b = 0$

6- Montrer à partir de 4- que la fonction de Westergaard du chargement 3 s'écrit :

$$Z_I(z) = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \cos^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) - \cot^{-1} \left(\frac{b}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{a^2 - b^2}} \right) \right]$$

$$\text{Chargement 2} \quad Z_I = \frac{2Pz}{\pi(z^2 - b^2)} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{z^2 - a^2}}$$



$$\text{Chargement 3} \quad Z_I = \frac{2\sigma z}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \int_b^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{z^2 - x^2} dx$$

$$\text{Posons } x = a \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} dx = -a \sin \theta d\theta \\ \theta = \cos^{-1}(x/a) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{z^2 - x^2} dx &= \int \frac{-a^2 \sin^2 \theta}{z^2 - a \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int \frac{-a^2 \sin^2 \theta}{z^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - a^2 \cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{-a^2}{(z^2 - a^2) \cot^2 \theta + z^2} d\theta \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{z^2 - x^2} dx = \int \frac{-a^2}{(z^2 - a^2) \cot^2 \theta + z^2} d\theta$$

On pose ensuite $t = \cot \theta \Rightarrow \begin{cases} dt = -(1 + \cot^2 \theta) d\theta \\ d\theta = -\frac{dt}{1+t^2} \text{ avec } \theta = \cot^{-1} t \end{cases}$

$$\int \frac{a^2}{(z^2 - a^2) t^2 + z^2} \frac{dt}{1+t^2} = \int \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{z^2 - a^2}{(z^2 - a^2) t^2 + z^2} \right] dt$$

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = -\cot^{-1} t = -\cos^{-1} \frac{x}{a}$$

Posons $u = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} t \Rightarrow du = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} dt$

$$1+u^2 = \frac{z^2 + (z^2 - a^2) t^2}{z^2} \Rightarrow \frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} \frac{z^2}{z^2 + (z^2 - a^2) t^2} dt$$

$$\frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} \frac{du}{1+u^2} = \frac{z^2 - a^2}{z^2 + (z^2 - a^2) t^2} dt$$

$$\int -\frac{z^2 - a^2}{(z^2 - a^2) t^2 + z^2} dt = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} \int -\frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} \cot^{-1} u$$

$$u = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} t \Rightarrow du = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} dt \quad \int -\frac{z^2 - a^2}{(z^2 - a^2) t^2 + z^2} dt = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} \int -\frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} \cot^{-1} u$$

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = -\cot^{-1} t = -\cos^{-1} \frac{x}{a}$$

$$Z_1(z) = \frac{2\sigma}{\pi} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \int_b^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{z^2 - x^2} dx = \frac{2\sigma}{\pi} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[\frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} \cot^{-1} u - \cos^{-1} \frac{x}{a} \right]_{x=b}^{x=a}$$

Bornes $\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{a} \text{ et } t = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{x}{a \sqrt{1 - x^2/a^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ u = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z} t = \frac{x}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{a^2 - x^2}} \\ b < x < a \Rightarrow \cot^{-1} \left[\frac{b}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{a^2 - b^2}} \right] < \cot^{-1} u < 0 \end{cases}$

$$Z_1(z) = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \cos^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) - \cot^{-1} \left(\frac{b}{z} \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{a^2 - b^2}} \right) \right]$$

Principe de superposition en MLR

Le principe de superposition affirme que dans un matériau élastique linéaire, les composantes des contraintes, des déformations et des déplacements sont « additives ». Cette superposition est cependant soumise à certaines règles : par exemple, deux contraintes normales selon la direction \vec{x} peuvent s'ajouter entre elles, alors qu'une contrainte normale ne peut être additionnée à une contrainte de cisaillement. Il en est de même pour les facteurs d'intensité des contraintes (FIC) : on ne peut additionner des FIC que s'ils concernent le même mode de sollicitation (mode I, II ou III).

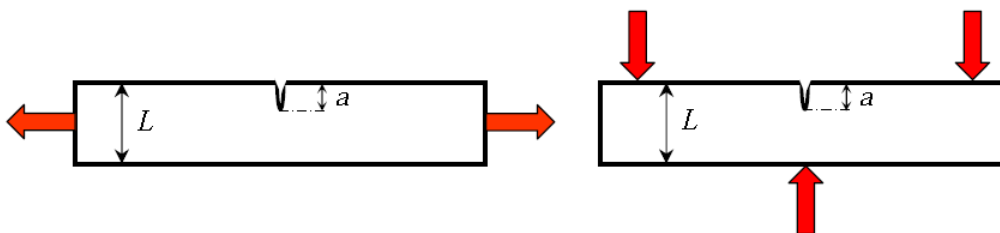
Considérons par exemple une fissure sollicitée en mode I par trois chargements différents ($\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\sigma^{(3)}$). Le principe de superposition permet d'écrire :

$$K_I^{total} = K_I^{(1)} + K_I^{(2)} + K_I^{(3)}$$

Si la même fissure est sollicitée simultanément en mode I, en mode II et en mode III, le FIC $K^{(total)}$ n'est en aucun cas la somme de K_I , K_{II} et K_{III} :

$$K^{total} \neq K_I + K_{II} + K_{III}$$

L'exemple de la figure ci-dessous illustre le principe de superposition.



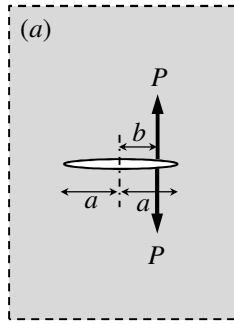
Les FIC K_I sont connus pour les chargements de traction et de flexion (voir manuels spécialisés). Et comme ces deux chargements conduisent à des sollicitations de la fissure en mode I, la solution est :

$$K_I^{total} = K_I^{traction} + K_I^{flexion}$$

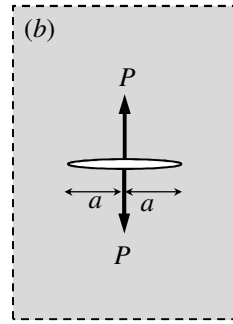
Dans de nombreux cas, le principe de superposition permet de déterminer le FIC d'une configuration de chargement relativement complexe. L'idée, qui est naturelle, est de décomposer ce chargement en chargements simples : le FIC attaché à la première configuration est alors la somme des FIC de chacun des chargements.

Examinons par exemple le chargement de la figure (I) ci-contre : il s'agit d'une fissure amorcée près d'un rivet dans une plaque.

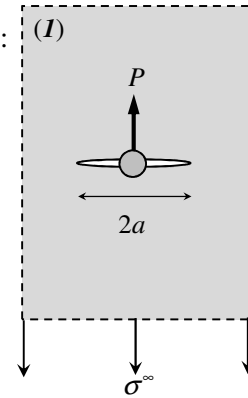
On va utiliser les solutions du chargement vu précédemment en TD (figures a et b) et décomposer le chargement I.



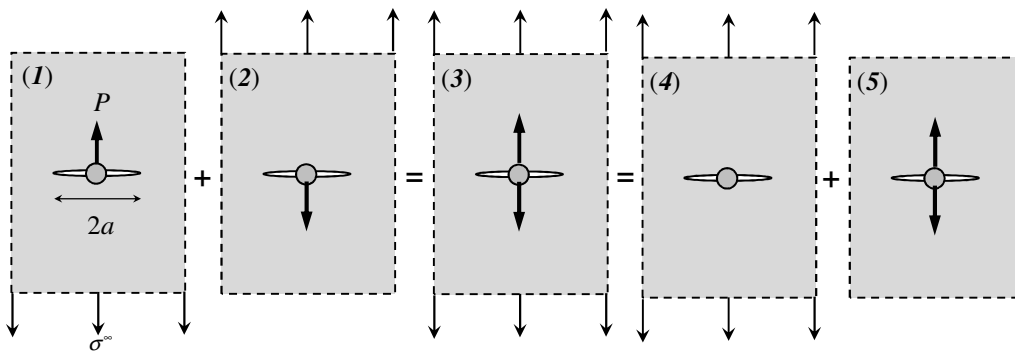
$$K_I^{(a)} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$



$$\Rightarrow K_I^{(b)} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}$$



Décomposition du chargement I

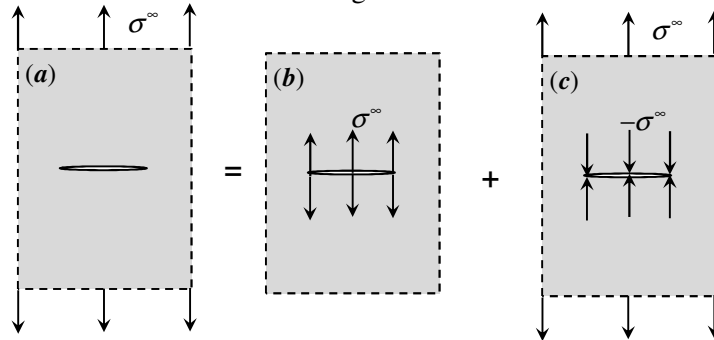


$$K_I^{(3)} = K_I^{(1)} + K_I^{(2)} = 2K_I^{(1)} \Rightarrow K_I^{(1)} = \frac{K_I^{(3)}}{2}$$

$$K_I^{(3)} = K_I^{(4)} + K_I^{(5)} \Rightarrow K_I^{(1)} = \frac{K_I^{(4)} + K_I^{(5)}}{2}$$

$$\Rightarrow K_I^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\sigma^\infty \sqrt{\pi a} + \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \right)$$

Un exemple intéressant est représenté ci-dessous. Le chargement *a* est la somme des chargements *b* et *c*.

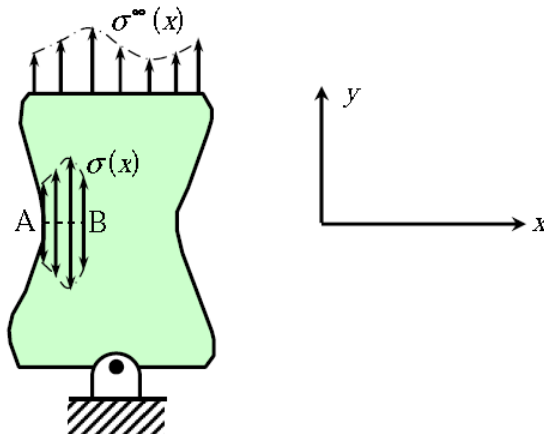


Dans le cas du chargement *c*, les lèvres de la fissure restent fermées et l'intensité des contraintes n'est pas transmise à l'extrémité de la fissure. On a donc :

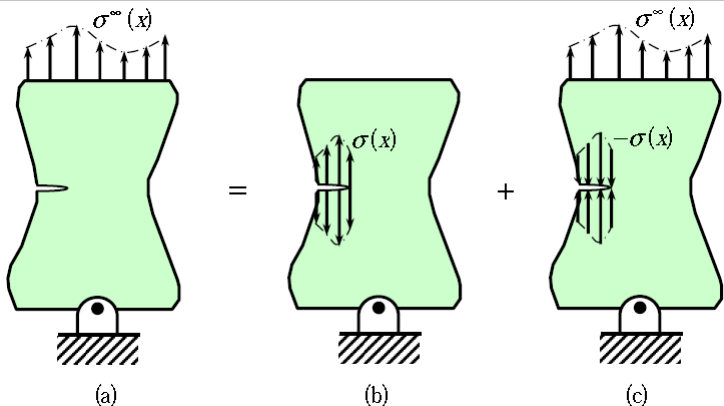
$$K_I^{(a)} = K_I^{(b)} + \underbrace{K_I^{(c)}}_{=0} \Rightarrow K_I^{(a)} = K_I^{(b)}$$

Cet exemple illustre un résultat plus général : les contraintes appliquées sur la frontière d'un solide fissuré (cas de la figure *a*) peuvent être déplacées sur les lèvres de la fissure (cas de la figure *b*) sans que le FIC K_I ne change.

La figure suivante représente un solide non fissuré soumis à un chargement de traction $\sigma^\infty(x)$ qui se traduit par une répartition $\sigma(x)$ sur le plan A-B.



Solide non fissuré soumis à un chargement $\sigma^\infty(x)$ conduisant à une répartition $\sigma(x)$ sur le plan A-B.



Supposons maintenant que le solide se fissure le long du plan A-B.
 Maintenir ce corps sous la contrainte $\sigma^\infty(x)$ (cf. figure a) revient, via le principe de superposition, à enlever le chargement $\sigma^\infty(x)$ pour le remplacer par le chargement $\sigma(x)$ sur les lèvres de la fissure.
 Le FIC K_I est alors inchangé :

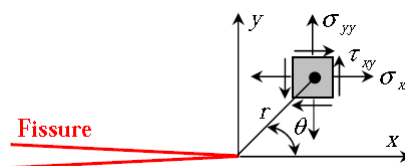
$$K_I^{(a)} = K_I^{(b)} + \underbrace{K_I^{(c)}}_{=0} \Rightarrow K_I^{(a)} = K_I^{(b)}$$

Zone plastifiée à fond de fissure

Les contraintes σ_{ij} au voisinage de l'extrémité d'une fissure sont de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

où $K = K_I, K_{II}$ ou K_{III}



Le calcul en élasticité aboutit à une singularité en $r^{-1/2}$, i.e. les contraintes tendent vers l' ∞ lorsque $r \rightarrow 0$.

Dans les matériaux réels, les contraintes restent évidemment finies et lorsqu'elles dépassent la limite d'élasticité σ_E du matériau, il se forme une zone plastifiée à l'extrémité de la fissure.

Il importe de connaître la taille de cette zone plastifiée pour cerner les limites d'application de la mécanique linéaire de la rupture.

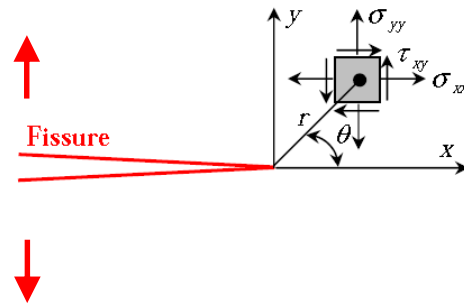
Longueur de la zone plastifiée dans le plan de la fissure

L'approche la plus simple est celle **d'Irwin**². Cet auteur considère, en première approximation, que le contour de la zone plastifiée correspond au lieu des points où les contraintes atteignent la limite d'élasticité σ_E du matériau. Pour déterminer le rayon r_E pour lequel cette frontière coupe le plan d'une fissure en contraintes planes, il pose $\sigma_y(r=r_E, \theta=0) = \sigma_E$, soit :

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_y(r_E, \theta=0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_E}} = \sigma_E$$

$$\Rightarrow r_E = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2$$



² G.R. Irwin, *Analysis of Stresses and Strains near the end of a crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics, p. 361-364, 1957

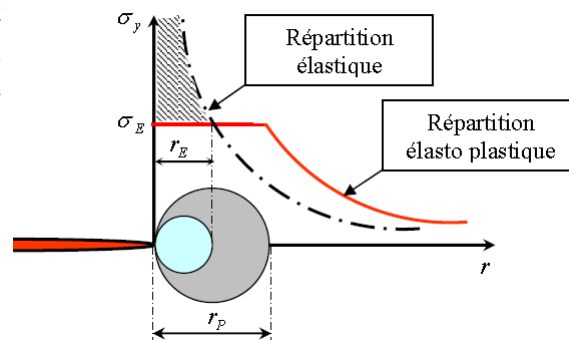
Pour représenter la distance r_E on suppose que le comportement du matériau est élasto-plastique parfait. On tronque ensuite le champ des contraintes à $\sigma_y = \sigma_E$.

Cette analyse fait cependant abstraction des forces non transmises représentées par l'aire hachurée de la figure ci-contre.

Pour tenir compte de ces forces, il convient d'assurer l'équilibre entre les deux répartitions de contraintes qui conduit à :

$$\int_0^{\infty} \sigma_y dr = \sigma_E \cdot r_p + \int_{r_E}^{\infty} \sigma_y dr$$

$$\Rightarrow \sigma_E \cdot r_p = \int_0^{r_E} \sigma_y dr$$



Répartition des contraintes élastiques et élasto-plastiques dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité.

$$\sigma_E \cdot r_P = \int_0^{r_E} \sigma_y dr$$

$$r_E = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2$$

$$\Rightarrow \int_0^{r_E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = 2 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r_E} = \frac{1}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_E} = \sigma_E \cdot r_P$$

$$r_P = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2$$

$$\Rightarrow r_P = 2r_E$$

La distribution des contraintes dans la répartition élastoplastique pour $r > r_P$, est obtenue par une translation d'une distance r_E de la répartition élastique.

Irwin rend compte de cette translation en définissant un FIC effectif K_{eff} qu'il obtient en augmentant la longueur de fissure de r_E , ce qui revient à considérer que la fissure a une longueur effective $a_{eff} = a + r_E$.

Dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie chargée en mode I,
Le FIC sans correction est donné par :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$$

Cette expression devient après correction :

$$K_I^{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi(a + r_E)}$$

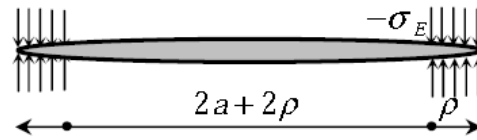
$$r_E = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 = \frac{a}{2} \left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_E} \right)^2$$

$$K_I^{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_E} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Une autre approche utilisée est celle de **Dugdale et Barenblatt (DB)**. Ces auteurs considèrent une fissure de longueur $a+\rho$ où ρ est la taille de la zone plastifiée. Des contraintes de compression d'intensité $-\sigma_E$ s'exercent sur cette zone après décharge.

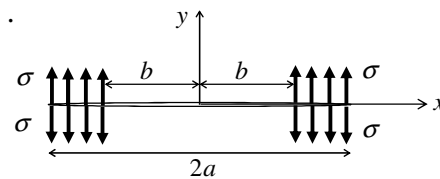
Le FIC effectif K_{eff} est ensuite calculé pour une petite fissure traversant la plaque chargée en mode d'ouverture :

$$K_I^{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi(a+\rho)}$$



Pour le calcul de la taille ρ de la zone plastifiée, DB utilisent l'expression du FIC K_I pour le chargement considéré (cf. TD9) .

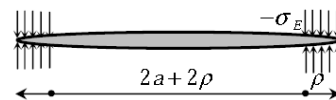
$$K_I = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \arccos \frac{b}{a}$$



Dugdale, D.S. (1960). Yielding of steel sheet containing slits. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* **8**, 100–104.

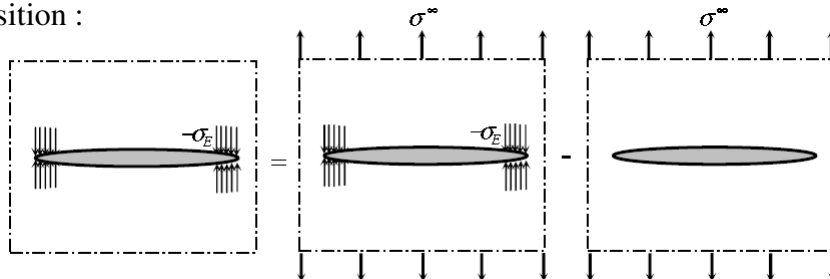
Barenblatt, G.I. (1959). On the equilibrium cracks due to brittle fracture. Straight-line cracks in flat plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **23**, 434.

$$K_I^{ADB} = -2\sigma_E \sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}} \int_a^{a+\rho} \frac{dx}{\sqrt{(a+\rho)^2 - x^2}}$$



$$\Rightarrow K_I^{DB} = -2\sigma_E \sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}} \arccos \frac{a}{a+\rho}$$

Le calcul de la taille ρ de la zone plastifiée s'appuie ensuite sur le principe de superposition :



$$K_I^{DB} = 0 - \sigma^\infty \sqrt{\pi(a+\rho)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+\rho} = \cos \left(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E} \right)$$

$$K_I^{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi(a+\rho)} \quad \text{avec} \quad \frac{a}{a+\rho} = \cos\left(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}\right) \quad K_I^{eff} = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}\right)}}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\frac{a}{a+\rho} = \cos\left(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}\right) \xrightarrow{DL \text{ pour } \sigma^\infty \ll \sigma_E} 1 - \frac{\rho}{a} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}\right)^2$$

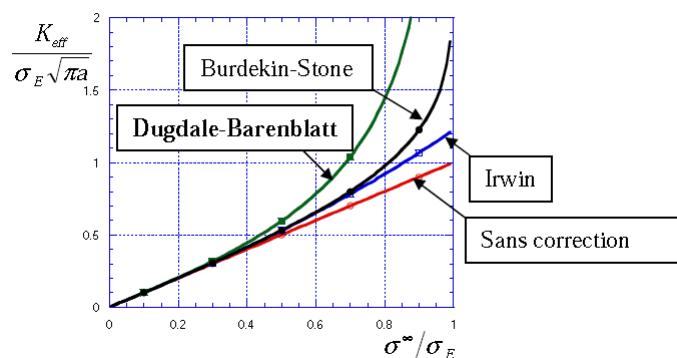
$$\Rightarrow \rho = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_E}\right)^2$$

$$r_P^{Irwin} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E}\right)^2$$

$$\text{Rq: } \frac{1}{\pi} \approx 0,312 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{8} \approx 0,393 \Rightarrow \rho^{DB} > r_P^{Irwin}$$

L'approche d'Irwin sous estime la distance ρ et donc la correction apporté au FIC K_I , alors que l'approche de DB la surestime. S'appuyant sur l'approche Westergaard, Burdekin et Stone proposent une estimation du K_{eff} se situant entre le modèle d'Irwin et celui de Dugdale-Barenblatt :

$$K_I^{eff} = \sigma_E \sqrt{\pi a} \sqrt{-\frac{8}{\pi^2} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_E}\right)\right)} \quad \text{Burdekin et Stone}$$



Burdekin, F.M. et Stone, D.E.W., « The crack opening displacement approach to fracture mechanics Yielding materials », Journal of strain Analysis 1-2 (1966)

Contour de la zone plastifiée en aval de l'extrémité de la fissure

Les modèles précédents donnent des estimations de la taille de la zone plastique r_p en $\theta = 0$, notée $r_p(\theta = 0)$. Pour déterminer $r_p(\theta)$ selon les valeurs de l'angle θ , les deux critères de plasticité les plus utilisés sont ceux de Von Mises et de Tresca. Ils s'écrivent dans l'espace des contraintes principales :

$$\text{Critère de Von Mises} \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_E^2$$

$$\text{Critère de Tresca} \quad \text{Max}(\sigma_I - \sigma_J) = \sigma_E$$

On utilise ces deux critères pour déterminer le contour $r_p(\theta)$ de la zone plastifiée lorsque le chargement est en mode d'ouverture – mode I en état de contraintes planes ou de déformations planes.

En mode II ou III, le contour $r_p(\theta)$ de la zone plastifiée est déterminé par le critère de Von Mises qui s'écrit dans l'espace des contraintes non principales :

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) = \sigma_E^2$$

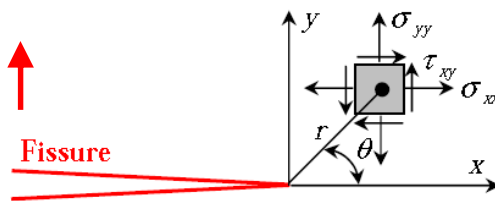
Calcul de $r_p(\theta)$ en mode d'ouverture – mode I

Etat de contraintes planes $\sigma_3 = 0$

$$\text{Von Mises} \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_E^2$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_p^{VM}(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$



$$\text{Tresca} \quad \text{Max}(\sigma_I - \sigma_J) = \sigma_1 = \sigma_E \quad \Rightarrow r_p^{Tresca}(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2$$

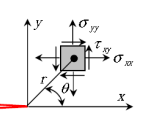
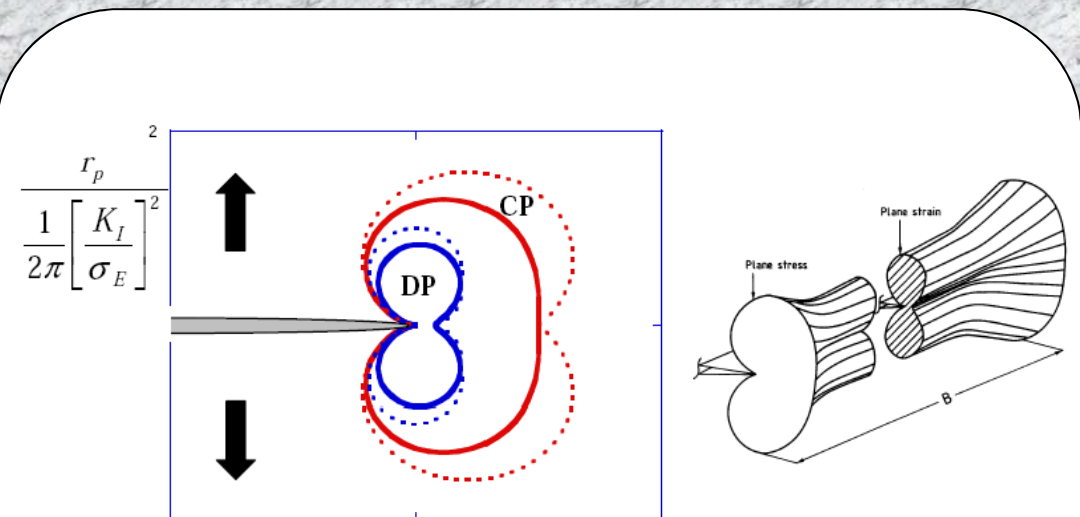
Etat de déformations planes $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$

Von Mises $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_E^2$

$\frac{K_I^2}{2\pi r_p} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(4 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left(1 - 2\nu - \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + \left(1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \right) = 2\sigma_E^2$

$\Rightarrow r_p^{VM} = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left((1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$

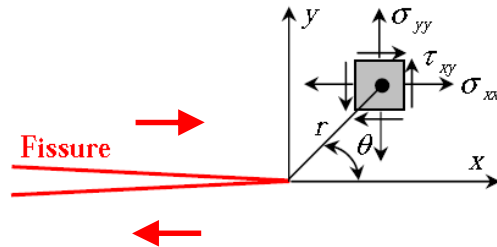
Tresca $\begin{cases} r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 & \text{si } 0 \leq \theta \leq 2 \arcsin(1 - 2\nu) \\ r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \sin^2 \theta & \text{si } 2 \arcsin(1 - 2\nu) < \theta \leq \pi \end{cases}$

Contours des zones plastifiées en mode I (calcul pour $\nu=0,3$)
 en **CP (rouge)** et **DP (bleu)**
 Trait continu - Critère de Von Mises
 Trait pointillé – Critère de Tresca

Calcul de $r_p(\theta)$ en mode II – Cisaillement plan

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases}$$



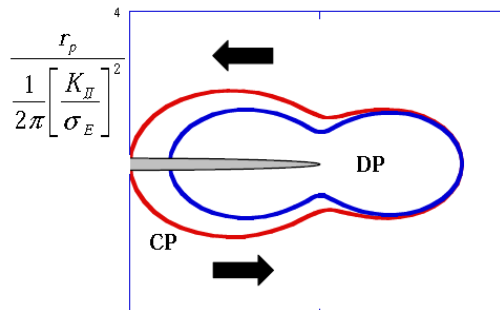
$$\text{Von Mises } (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) = \sigma_E^2$$

i) Mode II en contraintes planes

$$r_p(\theta) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\sigma_E^2} \left[\begin{array}{l} 4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ + 3 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{array} \right]$$

ii) Mode II en déformations planes

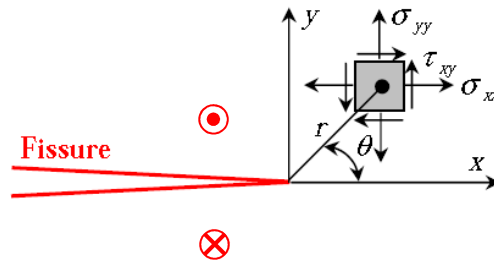
$$r_p(\theta) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\sigma_E^2} \left[\begin{array}{l} 4(1+\nu)^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ - 12\nu \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 3 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{array} \right]$$



Contours des zones plastifiées en mode I (calcul pour $\nu=0,3$) en **CP (rouge)** et **DP(bleu)**
Critère de Von Mises

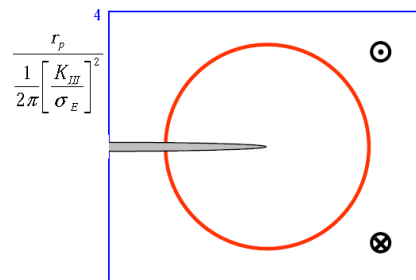
Calcul de $r_p(\theta)$ en mode III – Cisaillement anti-plan

$$\begin{cases} \sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases}$$



$$\text{Von Mises } (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) = \sigma_E^2$$

$$\Rightarrow r_p(\theta) = \frac{3K_{III}^2}{2\pi\sigma_E^2}$$



Méthodes pratiques de calcul du facteur d'intensité des contraintes K

Les relations donnant les champs des contraintes et des déplacements montrent que ces champs locaux sont décrits par un paramètre unique : le FIC K_I , K_{II} ou K_{III} selon le mode de sollicitation.

Comment ce paramètre s'exprime en fonction des données globales : géométrie de la structure et chargement appliqué?

Les expressions du FIC K ont généralement la forme suivante :

$$K = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} f(a/W)$$

Où σ^∞ est la contrainte appliquée à la structure, a la longueur (ou la demi longueur) de la fissure, W une dimension de la structure (souvent la largeur ou demi largeur) et $f(a/W)$ un paramètre géométrique sans dimension (appelé fonction complaisance).

Lorsque la structure est de grande dimension par rapport à la taille de la fissure, $f(a/W)$ prend une valeur constante comme dans le cas d'une plaque comportant une petite fissure sollicitée en mode I (figure 1):

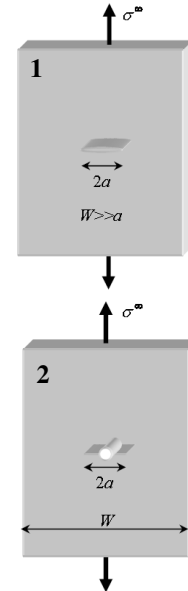
$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (f(a/W) = 1)$$

La figure 2 représente l'éprouvette CCT (Central Cracked Tension specimen). La fissure n'est pas de taille négligeable par rapport à la largeur W de la plaque.

Le facteur d'intensité des contraintes, calculé par éléments finis, est donné par :

$$K = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} f(a/W)$$

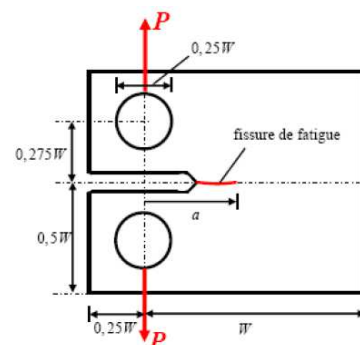
$$f(a/W) = \left(\cos \frac{\pi a}{W} \right)^{-1/2} \left(1 - 0,1 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 0,96 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right)$$



Une autre éprouvette très utilisée dans les essais de fatigue est l'éprouvette CT (Compact Tension specimen). Le FIC K_I pour une épaisseur d'éprouvette t est donné par :

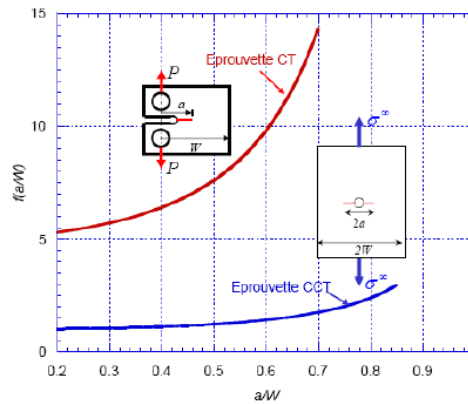
$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} f(a/W)$$

$$\sigma^\infty = \frac{P}{Wt}$$



$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(2 + \frac{a}{W}\right) \left(0,866 + 4,64 \left(\frac{a}{W}\right) - 13,32 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14,72 \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5,6 \left(\frac{a}{W}\right)^4\right)}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2} \left(\frac{\pi a}{W}\right)^{1/2}} \quad \text{Eprouvette CT}$$

La figure ci-dessous compare les fonctions complaisances $f(a/W)$ des éprouvettes CT et CCT

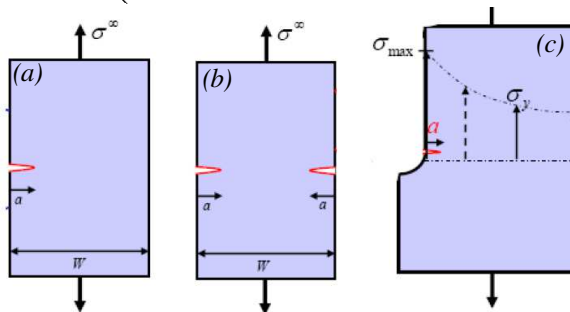


L'éprouvette CT a une longueur de ligament ($W-a_0$) relativement importante. Elle est très utilisée dans l'étude de la propagation des fissures de fatigue et pour déterminer la ténacité d'un matériau après pré fissuration jusqu'à une longueur de l'ordre de $a/W \approx 0,5$

Des manuels spécialisés donnent les expressions du FIC K pour de multiples configurations de chargement^{4,5,6}.

Les fonctions complaisances pour les cas les plus rencontrés dans la pratique sont :

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \left(1,12 - 0,23\left(\frac{a}{W}\right) + 10,55\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21,71\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30,38\left(\frac{a}{W}\right)^4 \right) \quad \text{Cas de la figure (a)}$$



$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} f(a/W)$$

⁴ D.P. Rooke and D.J. Cartwright, *Stress Intensity Factors*, Her Majesty's Stationary Office, London, 1976

⁵ H. Tada, P.C. Paris and G.R Irwin, *The Stress Analysis Handbook*, 2nd edition Paris Productions Inc., 1985

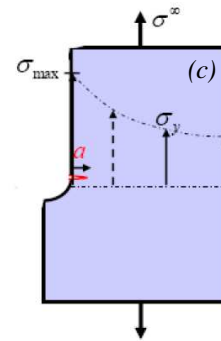
⁶ Y. Murakami, *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Oxford, 1987

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \left(1 - 2\frac{a}{W}\right)^{-1/2} \left(1,12 - 1,12\left(\frac{a}{W}\right) - 0,06\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0,73\left(\frac{a}{W}\right)^3\right)$$

Cas de la figure (b)

Une configuration intéressante que l'on rencontre dans la pratique est celle schématisée sur la figure c. Tant que la taille de la fissure est faible, celle-ci reste dans le champ de facteur de concentration de contrainte K_t , dû à la présence de l'entaille et le FIC K_I est donné en première approximation par :

$$K_I = 1,12\sigma^{\max} \sqrt{\pi a} = 1,12K_t\sigma^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

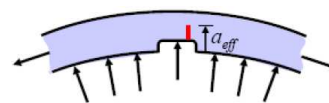
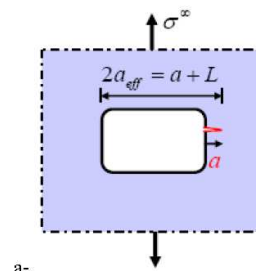


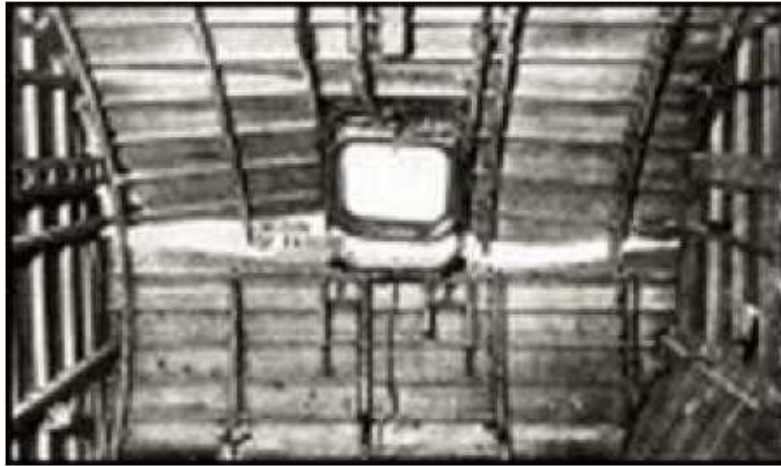
Les structures navales ou aéronautiques comportent souvent des hublots aux bords desquels des fissures peuvent s'amorcer. La figure a- présente cette configuration de fissure qui est à l'origine de l'accident survenu en 1954 en plein vol sur l'avion Comet; le chargement est dû à la pressurisation de la cabine.

Dans ce cas on considère que la longueur effective $2a_{eff}$ de la fissure est égale à sa longueur réelle a augmentée de la largeur L du hublot :

$$2a_{eff} = a + L$$

Une autre illustration de ce type de configuration de fissure est indiquée sur la figure b-. Il s'agit d'une fissure amorcée au fond d'une cannelure dans un cylindre sous pression interne. Une telle fissure peut provoquer l'éclatement du cylindre. Dans ce cas aussi on augmente la longueur réelle de la fissure par la profondeur de la cannelure.





fissure de fatigue partant d'un coin d'un hublot de Comet Source : <http://aviation-safety.net/>

Méthode des fonctions poids

Considérons une structure fissurée sollicitée en mode I sous deux conditions de chargement (1) et (2) et supposons que la solution $K_I^{(1)}$ est connue pour le chargement (1). En s'appuyant sur des intégrales de contour indépendantes des contours d'intégration, Bueckner⁷ et Rice⁸ ont montré que la solution pour le chargement (2) s'exprime en fonction de celle du chargement (1) :

$$K_I^{(2)} = \frac{E}{2K_I^{(1)}} \left[\oint_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a} d\Gamma + \int_A F_i \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a} dA \right]$$

où Γ et A sont respectivement le périmètre et l'aire de la surface fissurée, u_i , T_i et F_i les composantes, selon x et y , du vecteur déplacement, du vecteur contrainte sur le contour Γ et des forces de volume. Le chargement (1) étant choisi de façon arbitraire, la fonction de dimension $(Longueur)^{-1/2}$:

⁷ H.F. Bueckner, *A novel principle for the computation of stress intensity factors*, *Zenschrift für Angewandte Mathematic und Mechanik*, 50, pp. 529-546, 1970

⁸ J.R. Rice, *Some remarks on elastic crack tip stress fields*, *Journal of Solids and Structures*, 8, pp. 751-758, 1972

$$h(x_i) = \frac{E}{2K_I^{(1)}} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a}$$

où x_i sont les coordonnées x et y , est indépendante des conditions de chargement. On l'appelle la **fonction poids**.

- $h(x_i)$ fonctions poids (tenseurs d'ordre 1) dépendant uniquement de la géométrie, permettent le calcul du FIK K pour n'importe quelle CL.
- Pour une structure 2D soumise à un chargement en mode I, le calcul du FIC K_I est effectué à partir de la relation :

$$K_I = \int_{\Gamma} p(x)h(x)dx$$

Où $p(x)$ est la traction qui s'exerce sur les lèvres de la fissure, c'est à dire la traction qui s'exercerait sur le plan de la fissure en l'absence de fissuration.

TD10 : Calcul de fonction poids

1- Calculer la fonction poids en mode I pour l'éprouvette fissurée ci-dessous

$$2\mu u_y = 2(1-\nu^*) \operatorname{Im} \bar{Z}_I - y \operatorname{Re} Z_I$$

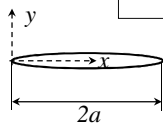
$$h(x) = \frac{E}{2K_I^{(1)}} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a}$$

$$\text{Sur les lèvres } u_y = \frac{2}{E'} \operatorname{Im} \bar{Z}_I \begin{cases} E' = E \text{ en CP} \\ E' = E/(1-\nu^2) \text{ en DP} \end{cases}$$

$$\text{Avec } Z_I = \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow \bar{Z}_I = \int Z_I dx = \sigma \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\text{Sur les lèvres } |x| < a \Rightarrow \operatorname{Im} \bar{Z}_I = \sigma \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{En CP on a alors } u_y = 2 \frac{\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2}$$



$$x \rightarrow a-x$$

$$\Rightarrow \text{en CP } u_y = 2 \frac{\sigma}{E} \sqrt{x(2a-x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial a} = \frac{2\sigma}{E} \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

