



UNIVERSITÉ DE LORRAINE **enim** École nationale d'ingénieurs de Metz **ARTS ET MÉTIERS ParisTech**

CFMR - Chapitre 2

2016-2017

Equations fondamentales de la mécanique linéaire de la rupture

A. Zegloul

SOMMAIRE

- **Rappels d'élasticité plane**
 - **Fonction d'Airy en variables complexes**
- **Représentation des déplacements et des contraintes**
 - **Expression du tenseur des efforts**

Expression des contraintes

$$\begin{cases} \sigma_x = A_{,yy} \\ \sigma_y = A_{,xx} \\ \sigma_{xy} = -A_{,xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{,x} = g_{,z} + g_{,\bar{z}} \\ g_{,y} = i(g_{,z} - g_{,\bar{z}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{,z} = \frac{1}{2}(g_{,x} - ig_{,y}) \\ g_{,\bar{z}} = \frac{1}{2}(g_{,x} + ig_{,y}) \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z})]$$

$$\sigma_x + i\sigma_{xy} = A_{,yy} - iA_{,xy} = -i(A_{,x} + iA_{,y})_{,y} = -i(2A_{,\bar{z}})_{,y} = 2(A_{,z\bar{z}} - A_{,\bar{z}\bar{z}})$$

$$\Rightarrow \sigma_x + i\sigma_{xy} = \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) - z\varphi''(\bar{z}) - \bar{\psi}'(\bar{z})$$

$$\sigma_y - i\sigma_{xy} = A_{,xx} + iA_{,xy} = (A_{,x} + iA_{,y})_{,x} = 2(A_{,\bar{z}})_{,x} = 2(A_{,\bar{z}z} + A_{,\bar{z}\bar{z}})$$

$$\Rightarrow \sigma_y - i\sigma_{xy} = \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) + z\varphi''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})$$

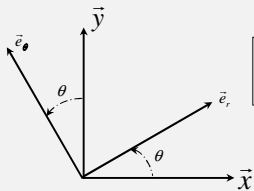
$$\sigma_y + \sigma_x = 2(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})) = 4\operatorname{Re}(\varphi'(z))$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2(\bar{z}\varphi''(z) + \bar{\psi}'(z))$$

$$\begin{cases} \sigma_y + \sigma_x = 4\operatorname{Re}\varphi'(z) = 4\operatorname{Re}\Phi(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)) = 2(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Phi(z) = \varphi'(z) \\ \Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z) \end{cases}$$

* Changement de repère



$$\begin{cases} \bar{e}_r = \cos\theta \cdot \bar{x} + \sin\theta \cdot \bar{y} \\ \bar{e}_\theta = -\sin\theta \cdot \bar{x} + \cos\theta \cdot \bar{y} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_r \\ \bar{e}_\theta \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{P} : \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \\ -u_x \sin\theta + u_y \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$u_r + iu_\theta = e^{-i\theta}(u_x + iu_y)$$

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta}(\kappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}'(\bar{z}))$$

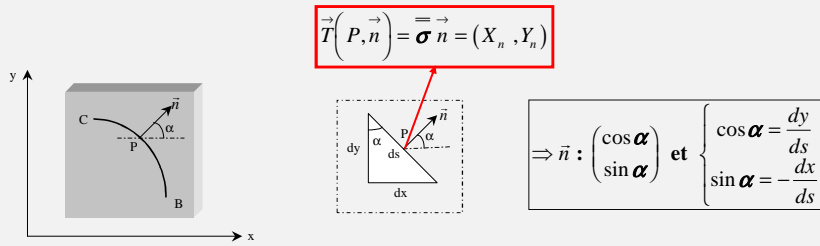
$$\overline{\overline{\sigma}}_{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta} = \mathbf{P} \overline{\overline{\sigma}}_{\bar{x}, \bar{y}} {}^t \mathbf{P}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} = e^{2i\theta}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy}) \end{cases}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)) = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z))$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Phi'(z) = \varphi''(z) \\ \Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z) \end{cases}$$

Expression du torseur des efforts



$$\vec{T}(P, \vec{n}) = \vec{\sigma} \vec{n} = (X_n, Y_n)$$

$$\Rightarrow \vec{n} : \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{dy}{ds} \\ \sin \alpha = -\frac{dx}{ds} \end{cases}$$

* Vecteur contrainte

$$\begin{aligned} X_n &= \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_x \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = A_{,yy} \cos \alpha - A_{,xy} \sin \alpha \\ Y_n &= \vec{y} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha = -A_{,xy} \cos \alpha + A_{,xx} \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \\ Y_n = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \end{cases}$$

* Résultante par unité d'épaisseur sur BC

$$\vec{F} = \int_B^C \vec{T}(P, \vec{n}) ds \Rightarrow \begin{cases} X = \int_B^C X_n ds \\ Y = \int_B^C Y_n ds \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \int_B^C X_n ds \\ Y = \int_B^C Y_n ds \end{cases}$$

$$X + iY = \int_B^C (X_n + iY_n) ds = \int_B^C d \left(\frac{\partial A}{\partial y} - i \frac{\partial A}{\partial x} \right) = -i \left[\frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{\partial A}{\partial y} \right]_B^C = -2i \left[\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} \right]_B^C$$

$$A = \frac{1}{2} [\bar{z} \varphi(z) + \chi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z})]$$

$$\Rightarrow X + iY = -i [\varphi(z) + z \bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})]_B^C$$

* Moment par unité d'épaisseur en un point O

$$\vec{M} = \int_B^C \vec{OP} \wedge \vec{T}(P, \vec{n}) ds = (0, 0, M)$$

$$\text{avec } M = \int_B^C (xY_n - yX_n) ds = \int_B^C \left[-xd \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) - yd \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \right]$$

$$\text{IPP} \Rightarrow M = [A]_B^C - \left[x \frac{\partial A}{\partial x} + y \frac{\partial A}{\partial y} \right]_B^C$$

$$\begin{aligned} x \frac{\partial A}{\partial x} + y \frac{\partial A}{\partial y} &= \text{Re} \left[(x + iy) \left(\frac{\partial A}{\partial x} - i \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] \\ &= \text{Re} \left[2z \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} \right] \\ &= \text{Re} \left[z \bar{\varphi}'(z) + \psi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = \text{Re} \left[\chi(z) - z \psi(z) - \bar{z} \bar{\varphi}'(\bar{z}) \right]_B^C$$

$$\text{avec } \psi(z) = \chi'(z)$$

Désignons par $(O; \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_3)$ le repère plan des coordonnées cartésiennes, et par $(M; \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{x}_3)$ un repère associé à des coordonnées curvilignes (α, β) . La figure 1 montre ces deux repères que l'on choisit orthonormés.

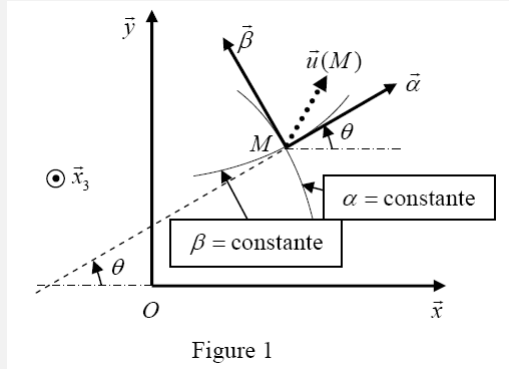
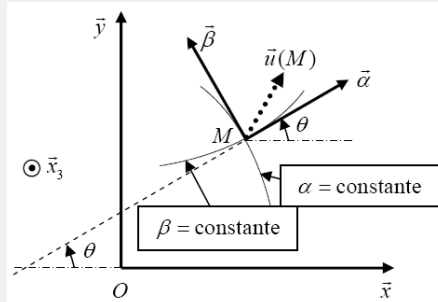


Figure 1

Aux coordonnées (x, y) , on associe le complexe $z = x + iy$; et de même aux coordonnées (α, β) , on peut associer le complexe $\zeta = \alpha + i\beta$. Comme $x = x(\alpha, \beta)$ et $y = y(\alpha, \beta)$, on a donc :

$$z = f(\zeta) \quad \text{et} \quad \frac{dz}{d\zeta} = f'(\zeta)$$



On montre facilement que $f'(\zeta) = |f'(\zeta)|e^{i\theta}$, autrement dit, l'argument de $f'(\zeta)$ est égal à l'angle θ que font entre eux les deux repères associés respectivement aux coordonnées (x, y) et (α, β) .

$$\arg f'(\zeta) = \arg dz - \arg d\zeta = \widehat{\vec{u}(M), \bar{x}} - \widehat{\vec{u}(M), \bar{\alpha}} = \theta$$

Donc, on a bien $f'(\zeta) = |f'(\zeta)|e^{i\theta}$ et de même pour le conjugué $\bar{f}'(\bar{\zeta}) = |f'(\zeta)|e^{-i\theta}$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{f'(\zeta)}{\bar{f}'(\bar{\zeta})} = e^{2i\theta}$$

Résumé des principaux résultats du chapitre

La résolution d'un problème d'élasticité plane se ramène à la recherche d'une fonction de contrainte, appelée fonction d'Airy A , qui est bi harmonique, c'est-à-dire telle que $\Delta(\Delta A) = 0$.

L'expression de cette fonction de contrainte, à partir des potentiels complexes $\varphi(z)$ et $\chi(z)$, est donnée par :

$$A(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] = \frac{1}{2}[\bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \chi(\bar{z})]$$

La recherche de la fonction d'Airy revient donc à trouver ces potentiels complexes. Les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement sont alors déterminées par les relations suivantes :

- dans un repère de coordonnées cartésiennes (x, y)

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})) = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)]$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})$$

- dans un repère associé à d'autres coordonnées (α, β) , et faisant un angle θ par rapport au précédent

$$\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\alpha\alpha} = 2(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})) = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]$$

$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = 2e^{2i\theta}[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)]$$

$$2\mu(u_\alpha + iu_\beta) = e^{-i\theta}[\kappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})]$$

avec $\kappa = 3 - 4\nu$ ou $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ selon qu'on est en présence d'un état de déformations planes ou d'un état de contraintes planes.

TD2 : Etude d'un ouvrage souterrain du génie civil

La stabilité d'un ouvrage souterrain et la détermination des caractéristiques de son soutènement sont des problèmes qui peuvent s'avérer ardues pour les ingénieurs du génie civil. Nous limiterons cette étude au problème de l'équilibre d'un massif excavé et de son soutènement en considérant un tunnel de section circulaire, la forme géométrique la plus simple (figure 3) ; le revêtement étant soumis à des actions extérieures (poids du rocher) et aux réactions de butée du rocher. Ce problème peut être traité à partir des potentiels complexes suivants :

$$\varphi(z) = Az + \frac{B}{z} \quad \text{et} \quad \chi(z) = C \ln z + Dz^2 + \frac{F}{z^2}$$

Les constantes A, B, C, D, F sont réelles ; E et ν sont le module d'Young et le coefficient de Poisson du massif rocheux.

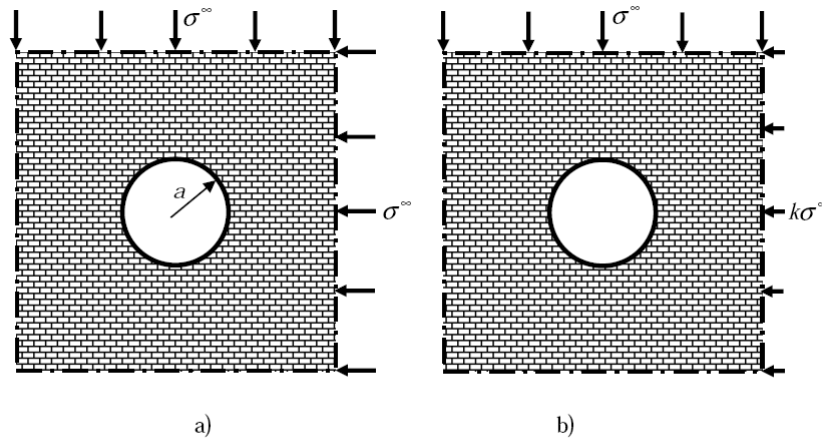


Figure 3. Massif rocheux percé d'un tunnel circulaire
a) chargement isotrope b) chargement anisotrope ($0 \leq k < 1$)

- 1- Donner l'expression des contraintes dans le massif rocheux en fonction des constantes A, B, C, D, F .
- 2- Déterminer dans le cas du chargement isotrope (figure 3a), les constantes en fonction de la géométrie (rayon a du tunnel) et du chargement (σ^∞); donner l'expression du champ des déplacements par intégration des déformations et par utilisation des potentiels complexes.
- 3- On considère le cas anisotrope (figure 3b) sans réaction de butée ($k=0$); déterminer dans ces conditions les contraintes en fonction des données géométrique et de chargement. Pour quelles valeurs de θ , la contrainte σ_θ le long des parois du tunnel est-elle de traction? Donner la courbe limitant cette zone.
- 4- On considère maintenant le cas anisotrope avec $0 < k < 1$. Calculer Les contraintes dans le massif rocheux. Quelles sont les valeurs de k permises pour éviter les contraintes de traction le long des parois du tunnel?

Corrigé TD2

Etude d'un tunnel $\varphi(z) = Az + \frac{B}{z}$ et $\chi(z) = C \ln z + Dz^2 + \frac{F}{z^2}$

- 1- Calcul des contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4 \operatorname{Re} \varphi' \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi'' + \chi'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4 \left(A - \frac{B}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = -2 \frac{C}{r^2} + \left(4D + 4 \frac{B}{r^2} + 12 \frac{F}{r^4} \right) \cos 2\theta + \left(4D - 4 \frac{B}{r^2} - 12 \frac{F}{r^4} \right) i \sin 2\theta \end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = 2A + \frac{C}{r^2} - \left(2D + 4\frac{B}{r^2} + 6\frac{F}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2A - \frac{C}{r^2} + \left(2D + 6\frac{F}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2D - 2\frac{B}{r^2} - 6\frac{F}{r^4} \right) \sin 2\theta$$

$\varphi(z) = Az + \frac{B}{z} \text{ et } \chi(z) = C \ln z + Dz^2 + \frac{F}{z^2}$

2- Cas de la compression isotrope (figure 3a)

C.L. à l' ∞ $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = -2\sigma^\infty = 4 \operatorname{Re} \varphi' \Big|_\infty = 4A \Rightarrow A = -\frac{\sigma^\infty}{2}$

$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 0 = 2(\bar{z}\varphi'' + \chi'')_\infty \Rightarrow D = 0$

C.L. sur la cavité du tunnel (paroi de rayon a) $\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$ quel que soit θ

$$2A + \frac{C}{a^2} = 0 \Rightarrow C = a^2 \sigma^\infty \quad \text{et} \quad B = F = 0$$

D'où en définitive $\sigma_{rr} = -\sigma^\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$ $\sigma_{\theta\theta} = -\sigma^\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$ et $\tau_{r\theta} = 0$

Calcul des déplacements par intégration des déformations

Compte tenu du chargement (isotrope) le déplacement est purement radial.

$2\mu \varepsilon_{rr} = (1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}$ en déformations planes, soit :

$$2\mu \varepsilon_{rr} = -\sigma^\infty \left(1 - 2\nu - \frac{a^2}{r^2} \right) = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \Rightarrow 2\mu u_r = -\sigma^\infty \left((1-2\nu)r + \frac{a^2}{r} \right)$$

$\sigma_r = -\sigma^\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$

$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left(\kappa \varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z}) \right)$

$\text{avec } \kappa = 3 - 4\nu \text{ en DP}$

Calcul des déplacements par les potentiels complexes

$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left((3-4\nu)\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\chi}' \right)$ avec $\varphi(z) = -\frac{\sigma^\infty}{2}z$ et $\chi(z) = a^2\sigma^\infty \ln z$

Soit

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left((2-4\nu)r + 2\frac{a^2}{r} \right) \Rightarrow 2\mu u_r = -\sigma^\infty \left((1-2\nu)r + \frac{a^2}{r} \right) \quad \text{et} \quad u_\theta = 0$$

14

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\operatorname{Re} \varphi' \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi'' + \chi'') \end{cases} \quad \varphi(z) = Az + \frac{B}{z} \quad \text{et} \quad \chi(z) = C \ln z + Dz^2 + \frac{F}{z^2}$$

3- Cas du chargement anisotrope sans réaction de butée (figure 3b avec $k=0$)

C.L. à l' ∞ $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = -\sigma^\infty = 4\operatorname{Re} \varphi' \Big|_\infty = 4A \Rightarrow A = -\frac{\sigma^\infty}{4}$

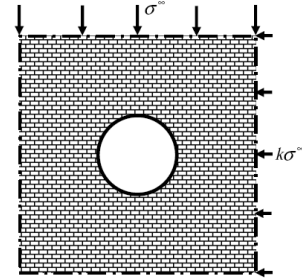
$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = -\sigma^\infty = 2(\bar{z}\varphi'' + \chi'')_\infty \Rightarrow D = -\frac{\sigma^\infty}{4}$$

C.L. sur la cavité du tunnel (paroi de rayon a) $\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$ quel que soit θ

$$2A + \frac{C}{a^2} = 0 \Rightarrow C = a^2 \frac{\sigma^\infty}{2}$$

$$\begin{cases} 2D + 4\frac{B}{a^2} + 6\frac{F}{a^4} = 0 \\ 2D - 2\frac{B}{a^2} - 6\frac{F}{a^4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\frac{B}{a^2} + 6\frac{F}{a^4} = \frac{\sigma^\infty}{2} \\ 2\frac{B}{a^2} + 6\frac{F}{a^4} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \end{cases}$$

$$B = a^2 \frac{\sigma^\infty}{2} \quad \text{et} \quad F = -a^4 \frac{\sigma^\infty}{4}$$



Et les contraintes s'écrivent alors :

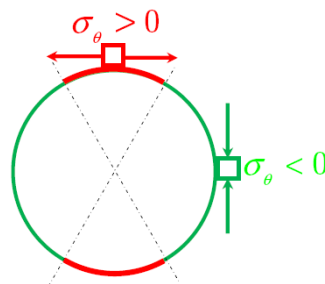
$$\sigma_{rr} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}\right) \sin 2\theta$$

Le long des parois ($r=a$) la contrainte orthoradiale vaut :

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma^\infty (1 + 2 \cos 2\theta) \quad \sigma_{\theta\theta} \geq 0 \quad \text{pour} \quad 60^\circ \leq \theta \leq 120^\circ \quad \text{et} \quad 240^\circ \leq \theta \leq 300^\circ$$



4- Cas du chargement anisotrope avec réaction de butée (figure 3b avec $0 < k < 1$)

$$\begin{aligned} \text{C.L. à l}'\infty \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= -(1+k)\sigma^\infty = 4\text{Re}\varphi' \Big|_\infty = 4A \Rightarrow A = -(1+k)\frac{\sigma^\infty}{4} \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} &= -(1-k)\sigma^\infty = 2(\bar{z}\varphi'' + \chi'') \Big|_\infty \Rightarrow D = -(1-k)\frac{\sigma^\infty}{4} \end{aligned}$$

C.L. sur la cavité du tunnel (paroi de rayon a) $\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$ quel que soit θ

$$2A + \frac{C}{a^2} = 0 \Rightarrow C = a^2(1+k)\frac{\sigma^\infty}{2}$$

$$\begin{cases} 2D + 4\frac{B}{a^2} + 6\frac{F}{a^4} = 0 \\ 2D - 2\frac{B}{a^2} - 6\frac{F}{a^4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\frac{B}{a^2} + 3\frac{F}{a^4} = (1-k)\frac{\sigma^\infty}{4} \\ \frac{B}{a^2} + 3\frac{F}{a^4} = -(1-k)\frac{\sigma^\infty}{4} \end{cases}$$

$$B = a^2(1-k)\frac{\sigma^\infty}{2} \quad \text{et} \quad F = -a^4(1-k)\frac{\sigma^\infty}{4}$$

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ s'écrit :

$$\sigma_{\theta\theta} = -(1+k)\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - (1-k)\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

Sur les parois du tunnel, $\sigma_{\theta\theta}$ vaut :

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma^\infty(1+k - 2(1-k)\cos 2\theta) \quad \text{avec} \quad 0 < k < 1$$

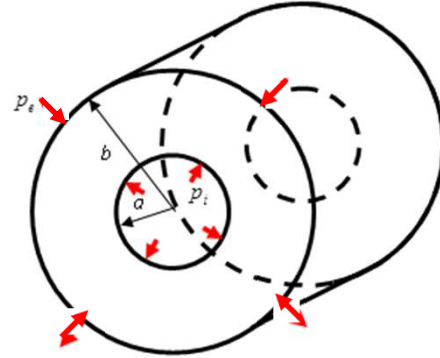
Comme $\cos 2\theta \leq 1$, cette contrainte reste négative

$$\text{si } 1+k - 2(1-k) \geq 0 \quad \text{soit pour } k \geq \frac{1}{3}$$

TD2 suite : Etude de structures trouées chargées en états plans

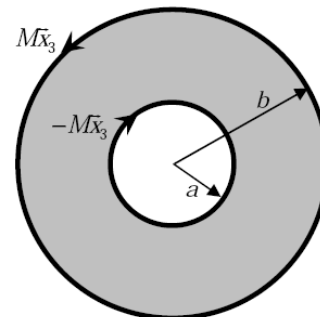
1- Un cylindre long de rayon intérieur a et extérieur b est soumis à une pression intérieure p_i et extérieure p_e . Les potentiels complexes associés à ce problème d'élasticité plane sont : $\varphi(z) = Az$ $\chi(z) = B \ln z$ (A et B constantes réelles)

- Déterminer les champ des contraintes et les constantes A et B , en fonction des données géométriques (rayons a et b) et du chargement (pressions p_i et p_e).
- Exprimer le déplacement par intégration des déformations et par utilisation des potentiels complexes.



2- Un anneau mince de rayon intérieur a et extérieur b est soumis à des couples M (par unité d'épaisseur) égaux et opposés, résultant de contraintes de cisaillement sur ses parois. Les potentiels complexes associés à ce problème d'élasticité plane sont : $\varphi(z) = 0$ $\chi(z) = Bi \ln z$ (B constante réelle)

- Déterminer les champ des contraintes et la constante B , en fonction du couple de cisaillement M .
- Exprimer le champ des déplacements.



Corrigé du TD2 suite

1- Cylindre creux sous pression interne et externe : $\varphi(z) = Az$ $\chi(z) = B \ln z$

Calcul des contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4 \operatorname{Re} \varphi' \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi'' + \chi'') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4A \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = -2\frac{B}{r^2} \end{cases}$$

soit

$$\sigma_{rr} = 2A + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2A - \frac{B}{r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

C.L. Pressions p_i et p_e sur les parois interne et externe :

$$\sigma_{rr}(a) = 2A + \frac{B}{a^2} = -p_i \quad \text{et} \quad \sigma_{rr}(b) = 2A + \frac{B}{b^2} = -p_e$$

Soit

$$2A = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2}$$

et

$$B = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_e - p_i)$$

Calcul du champ des déplacements par intégration de $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$ (u_θ nul compte tenu du chargement) et en déformations planes (cylindre épais) :

$$2\mu\varepsilon_{rr} = (1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} = \left((1-2\nu)2A + \frac{B}{r^2} \right) \Rightarrow 2\mu u_r = \left((1-2\nu)2Ar - \frac{B}{r} \right)$$

Calcul du champ des déplacements par les potentiels complexes :

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} ((3-4\nu)\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\chi}') = (3-4\nu)Ar - Ar - \frac{B}{r}$$

soit

$$2\mu u_r = \left((1-2\nu)2Ar - \frac{B}{r} \right)$$

et

$$u_\theta = 0$$

2- Anneau mince en cisaillement :

$$\varphi(z) = 0$$

$$\chi(z) = Bi \ln z$$

Pour le calcul des contraintes on utilise les relations :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4 \operatorname{Re} \varphi' \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi'' + \chi'') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r + \sigma_\theta = 0 \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = -2 \frac{Bi}{r^2} \end{cases}$$

$$\text{Soit } \sigma_r = \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = -\frac{B}{r^2}$$

C.L. Moment de cisaillement $-M\bar{x}_3$ sur la paroi interne de rayon a (paroi a) :

$$\oint_{\text{paroi } a} (a\bar{e}_r \wedge \tau_{r\theta}\bar{e}_\theta) a d\theta = -M\bar{x}_3 \quad \text{soit } B = \frac{M}{2\pi}$$

Pour le calcul du déplacement, on utilise :

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} (\kappa\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\chi}')$$

$$\text{Soit } u_r = 0 \quad \text{et } u_\theta = \frac{B}{2\mu r} = \frac{M}{4\pi\mu r}$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \text{ en CP}$$



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



Chapitre 3

Concentration des contraintes près d'entailles

A. Zegloul

SOMMAIRE

- **Introduction – Facteur de concentration de contraintes K_t**
 - **Plaque trouée uniformément chargée**
 - **Plaque trouée chargée en traction**
 - **Gradient de contrainte le long de l'axe d'une entaille**
 - **Gradient de contrainte le long du bord d'une entaille**
- **Influence de la géométrie et du chargement sur le facteur K_t**
 - **Influence des contraintes résiduelles sur le facteur K_t**
 - **Facteur K_t dans des structures complexes**
 - **Rupture par clivage**

Introduction

Dans les structures, des entailles géométriques dues à des changements brusques de section (épaulements, gorge, cannelure, orifice de lubrification ...) sont souvent inévitables compte tenu de leur rôle fonctionnel. Au voisinage de ces incidents de forme, les répartitions des contraintes sont inhomogènes et conduisent à des concentrations de contraintes : la figure 1 illustre ces concentrations où l'on observe que la contrainte atteinte à la racine du trou est bien plus élevée que la contrainte nominale σ_{nom} de traction appliquée à la plaque.

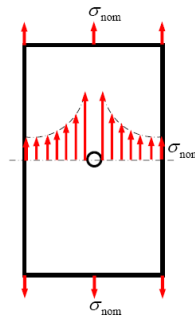


Figure 1. Répartition des contraintes autour d'un trou dans une plaque

Le facteur de concentration des contraintes est le rapport de la contrainte maximale (σ_{max}) observée à la racine de l'incident de forme sur la contrainte nominale (σ_{nom}) à laquelle la structure est soumise. Ce facteur, noté K_t , est donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

La sévérité de la concentration de contraintes dépend de la géométrie et de la configuration de l'entaille. Lorsqu'on conçoit une structure, on cherche à réduire autant que possible les concentrations de contraintes pour éviter notamment les problèmes de rupture par fatigue. Ce chapitre traite des différents aspects des concentrations des contraintes et des effets de la géométrie sur le facteur K_t : c'est l'une des questions fondamentales pour le dimensionnement en fatigue des structures. Le chapitre commence par la détermination théorique de ce facteur en s'appuyant sur les résultats du chapitre précédent.

* Détermination du facteur de concentration des contraintes

Considérons une plaque avec un trou elliptique central, très petit par rapport aux dimensions de la plaque (figure 2a).

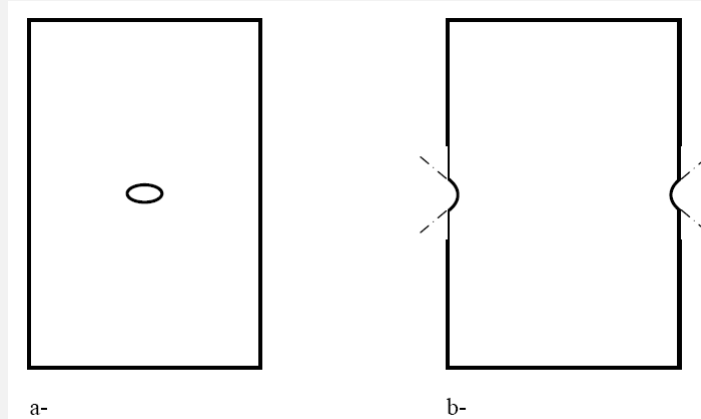


Figure 2. Entaille elliptique (a) et entaille hyperbolique (b)

Pour traiter le problème de concentration de contraintes au voisinage de ce genre de contour curviligne, on adopte le changement de variable suivant :

$$x = x(\alpha, \beta) = c \cosh \alpha \cos \beta$$

$$y = y(\alpha, \beta) = c \sinh \alpha \sin \beta$$

qui présente l'avantage de décrire à la fois les contours elliptiques et les contours de forme hyperbolique (figure 2b) selon que l'on maintient constante la variable α ou β .

- pour $\alpha = \alpha_0$

$$\begin{aligned} x &= c \cosh \alpha_0 \cos \beta = a \cos \beta \\ y &= c \sinh \alpha_0 \sin \beta = b \sin \beta \end{aligned} \quad \text{soit } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (équation d'une ellipse)}$$

où

$$a = c \cosh \alpha_0 ; b = c \sinh \alpha_0 \text{ et } c = \sqrt{a^2 - b^2} ;$$

les foyers de l'ellipse sont situés à $x = \pm c$.

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta) = c \cosh \alpha \cos \beta \\ y &= y(\alpha, \beta) = c \sinh \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

- pour $\beta = \beta_0$

$$\begin{aligned} x &= c \cosh \alpha \cos \beta_0 = a' \cosh \alpha \\ y &= c \sinh \alpha \sin \beta_0 = b' \sinh \alpha \end{aligned} \quad \text{soit } \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1 \quad (\text{équation d'une hyperbole})$$

où

$$a' = c \cos \beta_0 ; b' = c \sin \beta_0 \text{ et } c = \sqrt{a'^2 + b'^2} ;$$

les foyers de l'hyperbole sont aussi situés à $x = \pm c$.

On a ainsi un faisceau d'ellipses et d'hyperboles homofocales pour différentes valeurs fixées de α et β (figure 3).

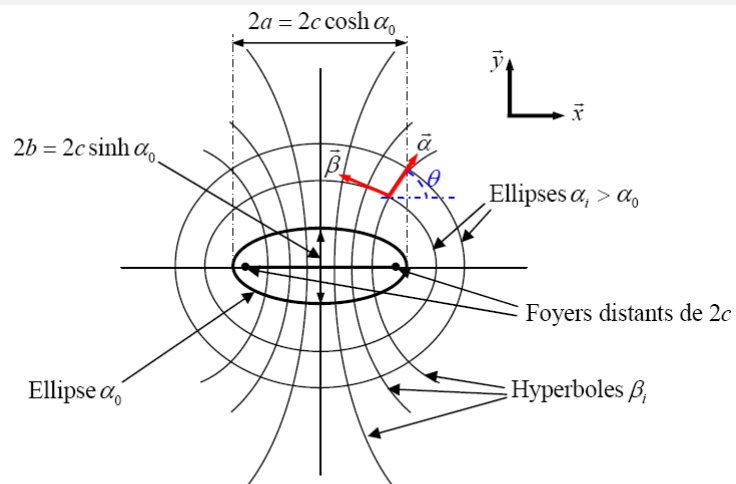


Figure 3. Faisceau d'ellipses et d'hyperboles homofocales

A partir des relations $x = x(\alpha, \beta) = c \cosh \alpha \cos \beta$
 $y = y(\alpha, \beta) = c \sinh \alpha \sin \beta$ on définit le complexe :

$$z = x + iy = c(\cosh \alpha \cos \beta + i \sinh \alpha \sin \beta) = c \cosh(\alpha + i\beta)$$

soit

$$z = c \cosh \zeta = f(\zeta) ; \quad \bar{z} = c \cosh \bar{\zeta} = \bar{f}(\bar{\zeta})$$

et

$$\frac{dz}{d\zeta} = f'(\zeta) = c \sinh \zeta ; \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{c \sinh \zeta}$$

La relation $\frac{f'(\zeta)}{f'(\zeta)} = e^{2i\theta}$ permet d'écrire :

$$e^{2i\theta} = \frac{f'(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{\sinh \zeta}{\sinh \bar{\zeta}} \quad \text{où} \quad \theta \text{ est l'angle } (\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Plaque percée d'un trou elliptique uniformément chargée

La figure 4 représente une plaque uniformément chargée, autrement dit, la contrainte σ^∞ appliquée à la plaque est perpendiculaire en tout point à ses extrémités. Cette plaque est percée d'un très petit trou elliptique. On utilise les résultats du chapitre précédent pour déterminer les potentiels complexes $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ associés à cette configuration de chargement.

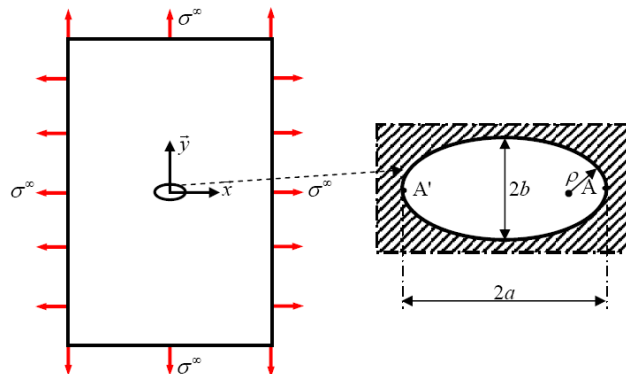
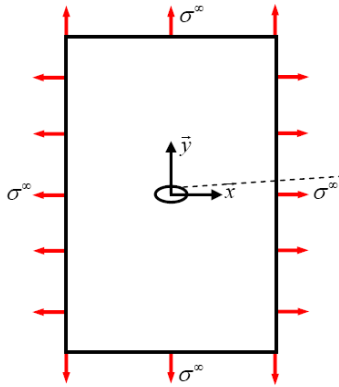


Figure 4. Plaque uniformément chargée, percée d'un trou elliptique de rayon à fond d'entaille ρ

- Les conditions limites aux bords de la plaque, c'est-à-dire à l'infini compte tenu de la taille importante de la plaque comparée à celle du trou elliptique, sont données par :

$$\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty \quad \text{et} \quad \sigma_{xy}^\infty = 0$$



$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})) = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)]$$

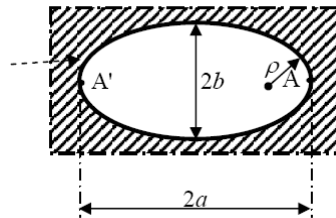
$$\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty = 2\sigma^\infty = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]_\infty$$

et

$$\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + 2i\sigma_{xy}^\infty = 0 = 2(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z))_\infty$$

On a donc pour $|z|$ grand :

$$\begin{cases} 2 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]_\infty = \sigma^\infty \\ (\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z))_\infty = 0 \end{cases}$$



- Les conditions limites aux extrémités du trou elliptique, c'est-à-dire pour $\alpha = \alpha_0$, sont données par :

$$\sigma_\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_0} = \sigma_{\alpha\beta} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \quad \text{quelque soit } \beta$$

$$\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\alpha\alpha} = 2(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})) = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]$$

$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = 2e^{2i\theta} [\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)]$$

$$\sigma_\beta \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]_{\alpha=\alpha_0} = 2(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}))_{\alpha=\alpha_0}$$

$$\sigma_\beta \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 2e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z))_{\alpha=\alpha_0}$$

d'où

$$(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}))_{\alpha=\alpha_0} - e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z))_{\alpha=\alpha_0} = 0$$

Il s'agit maintenant de trouver les fonctions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ satisfaisant les conditions limites

Comme, par raison de continuité, les composantes des contraintes doivent être périodiques et de période 2π par rapport à β , les solutions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ doivent avoir des formes qui engendrent cette périodicité. De telles formes sont :

$$\begin{aligned}\sinh n\zeta &= \sinh n\alpha \cos n\beta + i \cosh n\alpha \sin n\beta \\ \cosh n\zeta &= \cosh n\alpha \cos n\beta + i \sinh n\alpha \sin n\beta\end{aligned}$$

De plus, les fonctions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ n'intervenant que par leur dérivées, on peut adjoindre aux formes précédentes la fonction $A\zeta$ où A est une constante réelle ou complexe. Par ailleurs, les contraintes devant rester finies loin de l'entaille (c'est-à-dire à l'infini), l'entier n doit rester inférieur à un ($n \leq 1$) pour $\varphi(z)$ et inférieur à deux ($n \leq 2$) pour $\chi(z)$. Les solutions ont donc la forme générale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = c \cosh \zeta \\ \varphi(z) = A_0\zeta + A_1 \sinh \zeta + A_2 \cosh \zeta \\ \chi(z) = B_0\zeta + B_1 \sinh \zeta + B_2 \cosh \zeta + B_3 \sinh 2\zeta + B_4 \cosh 2\zeta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = c \cosh \zeta \\ \varphi(z) = A_0\zeta + A_1 \sinh \zeta + A_2 \cosh \zeta \\ \chi(z) = B_0\zeta + B_1 \sinh \zeta + B_2 \cosh \zeta + B_3 \sinh 2\zeta + B_4 \cosh 2\zeta \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\alpha\alpha} = 2(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})) = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = 2e^{2i\beta} [\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)] \end{array} \right.$$

Dans le cas de la plaque chargée uniformément et percée d'une petite entaille elliptique, les solutions $\varphi(z)$ et $\chi(z)$ ont été proposées par KOLOSOFF en 1913. Seuls les termes A_1 et B_0 sont non nuls, et cet auteur présente les solutions sous la forme :

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= Ac \sinh \zeta & (A_1 = Ac) \text{ réel} \\ \chi(z) &= Bc^2 \zeta & (B_0 = Bc^2) \text{ réel}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'(z) &= \frac{Ac \cosh \zeta}{c \sinh \zeta} = A \frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} ; \varphi''(z) = -\frac{A}{c \sinh^3 \zeta} ; \bar{z}\varphi''(z) = -\frac{A \cosh \bar{\zeta}}{\sinh^3 \zeta} \\ \chi'(z) &= \frac{Bc}{\sinh \zeta} ; \chi''(z) = -\frac{Bc \cosh \zeta}{\sinh^3 \zeta}\end{aligned}$$

• Comme $\coth \zeta \Big|_{\alpha \rightarrow \infty} = 1$, $\operatorname{Re}[\varphi'(z)]^\infty = A$ et $(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z))^\infty = 0$.

$$\Rightarrow A = \frac{\sigma_\infty}{2}$$

$$\varphi'(z) = \frac{Ac \cosh \zeta}{c \sinh \zeta} = A \frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta}; \quad \varphi''(z) = -\frac{A}{c \sinh^3 \zeta}; \quad \bar{z}\varphi''(z) = -\frac{A \cosh \bar{\zeta}}{\sinh^3 \bar{\zeta}}$$

$$\chi'(z) = \frac{Bc}{\sinh \zeta}; \quad \chi''(z) = -\frac{B \cosh \zeta}{\sinh^3 \zeta}$$

$$e^{2i\theta} = \frac{f'(\zeta)}{f'(\bar{\zeta})} = \frac{\sinh \zeta}{\sinh \bar{\zeta}}$$

• Au bord du trou elliptique, on a $\alpha = \alpha_0$, d'où $\zeta = \alpha_0 + i\beta$, $\zeta + \bar{\zeta} = 2\alpha_0$

La condition limite $(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}))_{\alpha=\alpha_0} - e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z))_{\alpha=\alpha_0} = 0$ devient :

$$A \left(\frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} + \frac{\cosh \bar{\zeta}}{\sinh \bar{\zeta}} \right) + \frac{\sinh \zeta}{\sinh \bar{\zeta}} \left(A \frac{\cosh \bar{\zeta}}{\sinh^3 \bar{\zeta}} + B \frac{\cosh \zeta}{\sinh^3 \zeta} \right) = 0$$

$$A \left[\frac{\cosh \zeta \sinh \bar{\zeta} + \sinh \zeta \cosh \bar{\zeta}}{\sinh \zeta \sinh \bar{\zeta}} \right] + \frac{1}{\sinh \bar{\zeta} \sinh^2 \zeta} (A \cosh \bar{\zeta} + B \cosh \zeta) = 0$$

$$\frac{1}{\sinh^2 \zeta \sinh \bar{\zeta}} \left\{ A \left[\sinh \zeta \cdot \sinh \left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2\alpha_0} \right) + \cosh \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2\alpha_0 - \zeta} \right] + B \cosh \zeta \right\} = 0$$

soit

$$A [\sinh \zeta \cdot \sinh 2\alpha_0 + \cosh 2\alpha_0 \cosh \zeta - \sinh 2\alpha_0 \sinh \zeta] + B \cosh \zeta = 0$$

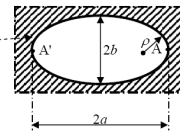
D'où finalement $(A \cosh 2\alpha_0 + B) \cosh \zeta = 0$ et donc : $B = -A \cosh 2\alpha_0 = -\frac{\sigma^\infty}{2} \cosh 2\alpha_0$

$$\varphi(z) = Ac \sinh \zeta$$

$$\chi(z) = Bc^2 \zeta$$

Les potentiels complexes ont alors pour expressions :

$$\varphi(z) = \frac{\sigma^\infty c}{2} \sinh \zeta \quad \text{et} \quad \chi(z) = -\frac{\sigma^\infty c^2 \cosh 2\alpha_0}{2}$$



La contrainte maximale σ_β^{\max} est atteinte à l'extrémité A (ou A') de l'entaille

c'est-à-dire pour $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = 0$ en A, soit $\zeta = \alpha_0$. Comme la contrainte $\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}$ est nulle, la valeur de σ_β^{\max} peut être calculée directement :

$$\sigma_\beta^{\max} = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]_{\zeta=\alpha_0} = 2\sigma^\infty \frac{\cosh \alpha_0}{\sinh \alpha_0} = 2\sigma^\infty \frac{a}{b}$$

$$a = c \cosh \alpha_0$$

$$b = c \sinh \alpha_0$$

Le facteur de concentration des contraintes K_t est quant à lui donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} = 2 \frac{a}{b}$$

Le rayon ρ à fond d'une entaille elliptique de grand axe a et de petit axe b

s'exprimant par $\rho = b^2/a$, le facteur K_t peut aussi s'écrire :

$$K_t = 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

Plaque percée d'un trou elliptique sollicitée en traction simple

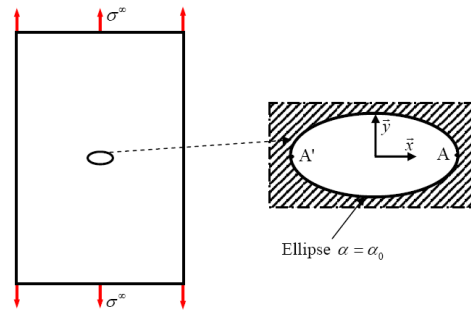


Figure 5. Plaque chargée en traction simple, percée d'un trou elliptique de rayon à fond d'entaille ρ

- Les conditions limites aux bords de la plaque (figure 5), sont données par :

$$\sigma_y^\infty = \sigma^\infty \quad \text{et} \quad \sigma_x^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})) = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(\bar{z})] \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \sigma_y^\infty = \sigma^\infty = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]_\infty$$

$$\sigma_y^\infty = 2(\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(\bar{z}))_\infty = \sigma^\infty$$

Les solutions pour cette configuration de chargement ont été données par Stevenson en 1945.

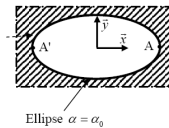
$$\left\{ \begin{array}{l} z = c \cosh \zeta \\ \varphi(z) = A_0 \zeta + A_1 \sinh \zeta + A_2 \cosh \zeta \\ \chi(\bar{z}) = B_0 \zeta + B_1 \sinh \zeta + B_2 \cosh \zeta + B_3 \sinh 2\zeta + B_4 \cosh 2\zeta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(z) = Ac \cosh \zeta + Bc \sinh \zeta \\ \chi(\bar{z}) = Dc^2 \zeta + Ec^2 \cosh 2\zeta + Fc^2 \sinh 2\zeta \end{array} \right.$$

Avec

$$A = -\frac{\sigma^\infty}{4} e^{2\alpha_0}, \quad B = \frac{\sigma^\infty}{4} (1 + e^{2\alpha_0}), \quad D = -\frac{\sigma^\infty}{4} (1 + \cosh 2\alpha_0),$$

$$E = \frac{\sigma^\infty}{8} e^{2\alpha_0} \cosh 2\alpha_0 \quad \text{et} \quad F = -\frac{\sigma^\infty}{8} e^{2\alpha_0} \sinh 2\alpha_0$$



La contrainte maximale σ_β^{\max} , atteinte à l'extrémité A de l'entaille (figure 5) pour $\zeta = \alpha_0$, est calculée comme dans le cas précédent :

$$\sigma_\beta^{\max} = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]_{\zeta=\alpha_0} = 4 \left(A + B \frac{\cosh \alpha_0}{\sinh \alpha_0} \right) \quad \sigma_\beta^{\max} = \sigma^\infty \left(-e^{2\alpha_0} + (1 + e^{2\alpha_0}) \frac{\cosh \alpha_0}{\sinh \alpha_0} \right)$$

$$\sigma_\beta^{\max} = \sigma^\infty \left(e^{2\alpha_0} \left(\frac{\cosh \alpha_0 - \sinh \alpha_0}{\sinh \alpha_0} \right) + \frac{\cosh \alpha_0}{\sinh \alpha_0} \right) \quad \sigma_\beta^{\max} = \sigma^\infty \left(\frac{e^{\alpha_0}}{\sinh \alpha_0} + \frac{\cosh \alpha_0}{\sinh \alpha_0} \right) = \sigma^\infty \left(\frac{2 \cosh \alpha_0 + \sinh \alpha_0}{\sinh \alpha_0} \right)$$

$$\sigma_\beta^{\max} = \sigma^\infty \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{nom}} = 1 + 2 \frac{a}{b} = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}$$